



**Strengthening Teaching Competences  
in Higher Education  
in Natural and Mathematical Sciences**



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

# **Jačanje nastavničkih kompetencija**

## **DIGITALNE KOMPETENCIJE**



[www.tecomp.ni.ac.rs](http://www.tecomp.ni.ac.rs)  
tecomp@ni.ac.rs  
tecomp.p2018@gmail.com

<b>Akronim projekta:</b>	<b>TeComp</b>
<b>Naziv projekta:</b>	<b>Strengthening Teaching Competences in Higher Education in Natural and Mathematical Sciences</b>
<b>Broj projekta:</b>	598434-EPP-1-2018-1-RS-EPPKA2-CBHE-JP
<b>Broj ugovora:</b>	2018-2467/001-001
<b>Web adresa projekta</b>	<a href="http://www.tecomp.ni.ac.rs">www.tecomp.ni.ac.rs</a>
<b>Finansiranje:</b>	Erasmus+
<b>Koordinatorska institucija:</b>	Univerzitet u Nišu
<b>Koordinator:</b>	PhD Jelena Ignjatović
<b>Trajanje projekta:</b>	15.11.2018 – 14.11.2022
<b>Radni paket:</b>	WP2 – Activity 2.4. Guidelines for technological enhancement of teaching and learning
<b>Organizacija rukovodilac WP2:</b>	Univerzitet u Nišu
<b>Verzija dokumenta:</b>	v.03
<b>Status:</b>	Finalna
<b>Nivo distribucije:</b>	Lokalni

## KONTROLNI LIST DOKUMENTA

Naziv dokumenta	Jačanje nastavničkih kompetencija- Digitalne kompetencije
Radni paket	WP2 – Upgrading educational infrastructure at the PC HEIs
Datum poslednje verzije	1.11.2021
Status	Finalna
Verzija dokumenta	v.03
Naziv fajla	Finalna verzija IT_Srpski.docx
Broj strana	142
Nivo distribucije materijala	Lokalni

## **Uređivački odbor**

**dr Miroslav Ćirić**, redovni profesor, PMF, Univerzitet u Nišu

**dr Zorana Lužanin**, redovni profesor, PMF, Univerzitet u Novom Sadu

**dr Andrijana Zekić**, redovni fakultet, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu

**dr Siniša Đurašević**, redovni profesor, Biološki fakultet, Univerzitet u Beogradu

**dr Slađana Dimitrijević**, docent, PMF, Univerzitet u Kragujevcu

## **LEKTOR**

**dr Jelena Petković**

vanredni profesor

Filološko-umetnički fakultet

Univerzitet u Kragujevcu

## **RECENZENT**

**Luis J. Rodríguez Muñiz,**

Prof. Titular de Universidad

Dpto. de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática

Universidad de Oviedo

## SADRŽAJ

Jelena Ignjatović: <b>Kreiranje interaktivnih nastavnih materijala</b> .....	5
Slađana Dimitrijević, Ana Kaplarević Mališić: <b>Mešovito učenje sa posebnim osvrtom na Obrnutu učionicu</b> .....	35
Nebojša Jasnić, Siniša Đurašević: <b>Modernizacija nastave i učenja biologije</b> .....	69
Tatjana Anđelković, Ivana Kostić: <b>Udaljeni pristup analitičkim instrumentima u realizaciji visokoškolske nastave hemije – od ideje do implementacije</b> .....	79
Goran Radojev: <b>Vizuelizacija problema pomoću softvera GeoGebra i Wolfram Mathematica</b> .....	92
Đurđica Takači: <b>Kombinovano učenje matematičkih sadržaja u dinamičkom okruženju</b> 107	
Sana Stojanović Đurđević: <b>Dokazivač teorema Isabelle u nastavi matematike</b> .....	130

## PREDGOVOR

Pred vama se nalaze smernice i uputstva za širu integraciju IKT-a u nastavi i učenje koja su pripremljena u okviru Erasmus+ projekta „Jačanje nastavnih kompetencija u visokom obrazovanju u prirodno-matematičkim naukama – TeComp“.

Projekat TeComp je zamišljen kao projekat regionalnog nivoa u Srbiji i Albaniji čiji je jasan cilj unapređenje kvaliteta nastave i učenja u oblasti prirodno-matematičkih nauka na univerzitetima u partnerskim zemljama, u skladu sa naprednom praksom EU.

Tehnologija može omogućiti nove pristupe visokoškolskoj nastavi kroz unapređen nastavni proces i postupke procenjivanja i ocenjivanja.

Pripremljeni materijal za obuku razmatra širok spektar pitanja: teme orijentisane na kombinovano učenje, izbor koji se daje studentu kada i gde uči, mogućnosti za personalizovano učenje sa student pronalazi sopstveni put kroz materijal za učenje, i podršku za širok spektar uređaja i sistema tako da studenti mogu da izaberu aplikaciju ili platformu.

Publikacija se bavi digitalnim kompetencijama nastavnika na visokoškolskim ustanovama koje su potrebne za uspešan obrazovni proces. S tim u vezi, odabir tema je pažljivo izvršen kako bi bio omogućen razvoj digitalnih kompetencija nastavnika na visokoškolskim ustanovama, ali i integrisali savremeni pedagoški principi.

Principi i smernice za postavljanje efikasnog i korisnog virtuelnog okruženja za učenje koji su predstavljeni u ovoj publikaciji imaju za cilj da pomognu nastavnicima i učenicima da iskoriste nekoliko novih nastavnih alata dostupnih za nastavu prirodnih nauka i matematike.



# Sadržaj

Uvod.....	6
<u>Fleksibilno učenje</u> .....	7
<u>Fleksibilna pedagogija i elektronsko učenje</u> .....	7
<u>Mogućnosti i izazovi fleksibilnog pristupa elektronskom učenju</u> .....	9
<u>Model kombinovanog učenja</u> .....	10
<u>Izvrnuta učionica</u> .....	11
<u>Interpretacija „tutorstva”</u> .....	12
<u>Obrazovna interakcija i komunikacija</u> .....	13
<u>Klipovi znanja</u> .....	13
<u>Definisanje smernica za dizajn video materijala</u> .....	13
<u>Privatnost i autorska prava</u> .....	15
<u>Kreiranje studentskih video materijala</u> .....	16
<u>Alati</u> .....	16
<u>Interaktivni video sadržaji</u> .....	17
<u>Tipovi interakcije u video sadržaju</u> .....	17
<u>Uputstvo za dizajniranje interaktivnih video materijala</u> .....	19
<u>Efekat davanja povratne informacije</u> .....	20
<u>Edukativni poster</u> .....	21
<u>Ciljevi učenja koji se postižu izradom postera</u> .....	24
<u>Primeri postera u visokom obrazovanju</u> .....	25
<u>Smernice za dizajn plakata u visokom obrazovanju</u> .....	25
<u>Alati i pomoć za dizajniranje postera</u> .....	27
<u>Diskusija i kolaboracija u visokom obrazovanju</u> .....	28
<u>Dizajniranje zadataka za rad u grupi</u> .....	29
<u>Skripta sadržaja</u> .....	30
<u>Skripta zasnovana na ulogama</u> .....	31
<u>Literatura</u> .....	33

## Uvod

Sa sigurnošću možemo tvrditi da živimo u digitalnom dobu, okruženi najnovijim tehnološkim dostignućima. Stopa tehnoloških promena stalno se povećava i ne pokazuje nikakve znake stagnacije. Tehnologija je uslovlila masovne promena u ekonomiji, u načinu komunikacije i međusobnog povezivanja među ljudima i, naravno, u načinu podučavanja i učenja. Kako su naše obrazovne institucije izgrađene uglavnom za neko drugo doba, a ne za digitalnu eru, učitelji i nastavnici suočeni su sa velikim izazovom neophodnosti promena. Kako da budemo sigurni da ćemo razviti generacije studenata koji su

sposobni da se suoče sa sve nestabilnijom, neizvesnijom i složenijom budućnošću? Šta treba zadržati u svojim nastavnim metodama, a šta treba promeniti?

Cilj TeComp projekta jeste da se visokoškolske institucije u Srbiji i Albaniji priključe procesu transformacije podučavanja i učenja, koji se aktivno odvija na univerzitetima razvijenih evropskih zemalja. Svi procesi promena uključuju rizike, ali takođe, predstavljaju mogućnosti za osavremenjavanje i unapređenje. Treba primeniti brojne aktivnosti kako bi se realizovalo prilagođavanje našeg obrazovnog sistema evropskom prostoru visokog obrazovanja (European Higher Education Area – EHEA). Pred nama su dalekosežne reforme koje uključuju duboke promene strukturne, funkcionalne i sadržajne prirode koje imaju direktan uticaj na institucionalnu i profesionalnu kulturu.

Usvajanje novog obrazovnog modela usmerenog na sticanje veština nužno uključuje drugačije vrednovanje i realizaciju nastave, kao i definisanje predloga za obuku nastavnika i njihov profesionalni razvoj u okviru celoživotnog obrazovanja.

Obrazovanje zasnovano na kompetencijama (fleksibilno učenje) podrazumeva promene u planiranju, metodologiji, sistemima vrednovanja ili podučavanju, koje su se učenicima nudile u prošlosti, pa ih je teško zamisliti bez odgovarajuće obuke nastavnika.

Očekuje se da će ovaj nastavni materijal doprineti razvoju nastave u oblasti pedagoško-psiholoških nauka i metodologije nastave prirodnih i matematičkih nauka. Nastavnici će kroz treninge predstaviti opšti okvir i određene primere primene modernih metoda i tehnologija u prirodnim naukama i matematici. Glavni ciljevi su:

(a) da se učesnicima treninga predstavie novi alati koje će oni moći da implementiraju i koriste za različite kurseve na univerzitetskom nivou i

(b) da predavači sa učesnicima treninga podele svoje iskustvo na gore pomenutim poljima i demonstriraju načine za poboljšanje kvaliteta visokog obrazovanja koji se koriste na evropskoj univerzitetskoj sceni.

## Fleksibilno učenje

### Fleksibilna pedagogija i elektronsko učenje

Fokusiraćemo se, u daljem radu, na to kako elektronsko učenje, poznato kao tehnološki unapređeno učenje, može podržati fleksibilnu pedagogiju i obuhvatićemo niz tema koje objašnjavaju kako tehnologija može omogućiti nove izbore studentima.

Fleksibilno učenje fokusira se na to da studentima pruži izbor u tempu, mestu i načinu njihovog učenja, a sva tri aspekta mogu se razviti i promovisati kroz odgovarajuću pedagošku praksu, praksu koja i sama može biti podržana i poboljšana putem e-učenja.

E-učenje se bavi korišćenjem računarskih tehnologija za podršku učenju, bilo da je to učenje lokalno (u kampusu) ili udaljeno (kod kuće ili na radnom mestu). Tehnologija može omogućiti nove pristupe načinu predavanja i ocenjivanja učenja i može učiniti određene pedagoške pristupe održivim i prilagodljivim, kada je reč o visokom obrazovanju.



Širok skup tehnoloških aplikacija koje omogućavaju različite metode realizacije nastave daju nastavnicima i učenicima širok izbor, pa materijal razmatra širok spektar pitanja:

- prelazak na kombinovano učenje, što učeniku omogućava da sam bira kada i gde će učiti;
- mogućnosti personalizovanog učenja sa studentom koji pronalazi sopstveni put kroz materijal za učenje;
- podrška za širok spektar uređaja i sistema tako da učenici mogu da izaberu željenu platformu.

Iako tehnologije učenja pružaju nove mogućnosti, one takođe mogu stvoriti dileme za institucije, obzirom da se otvaraju nova pitanja oko organizacije učenja u grupi, plagijarizma i izbora resursa koji omogućavaju njihovo korišćenje. Elektronsko učenje svakako nudi nove mogućnosti da podrži fleksibilnu pedagogiju u visokom obrazovanju, nudeći novi potencijal za realizaciju kvalitetnije nastave u visokoškolskom obrazovanju.

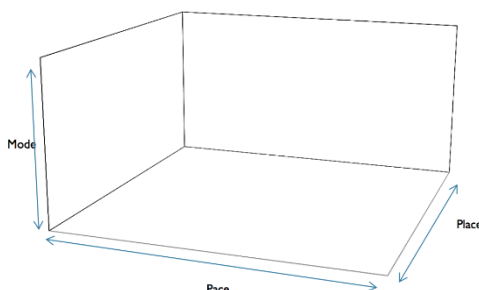
Razmotrimo veze između elektronskog učenja i pedagogije i novih mogućnosti koje se time otvaraju.

Fleksibilno učenje bavi se tempom, mestom i načinom učenja:

- tempo se obično fokusira na različite rasporede isporuke znanja, koji mogu biti skraćeni, ubrzani ili usporeni, bilo u okviru kompletnih programa (na primer trogodišnja diploma osnovnih studija) ili tako da omoguće studentima da rade individualnim tempom;
- mesto se tiče fizičke lokacije, koja može biti oformljena na poslu ili kod kuće, ili na nekom putu;
- režim obuhvata tehnologije učenja i mešovito učenje ili učenje na daljinu.

Na primer, u kontekstu tehnološki unapređenog učenja, tehnologija može da podrži fleksibilne metode, uz mogućnosti pristupa nastavnim materijalima van propisanih rasporeda, što omogućava fleksibilan tempo.

Prema gore navedenom, tempo, mesto i način rada su promenljive koje omogućavaju da se pedagoški pristup smesti u trodimenzionalni prostor fleksibilnog učenja. Na sledećem dijagramu, donja, prednja leva tačka nema fleksibilnost ni po jednoj osi, a povećava se nivo fleksibilnosti (izbora), dok se u prostoru kreće sa leva u desno, spređa ka pozadi i odozdo prema gore.



Uzimajući u obzir različite oblike nastave, učenja i ocenjivanja, koji su omogućeni razvojem modernih tehnologija, predstavljamo neke oblike savremenih metoda podučavanja i učenja :

- timski projekti i grupni rad;

- adaptivno/fleksibilno ocenjivanje putem različitih onlajn testiranja. Procena znanja se menja u zavisnosti od napretka i postignuća učenika u okviru testa, te test može postaviti složenija pitanja studentima koji dobro napreduju;
- primena novih pristupa radi veće motivisanosti učenika – gejmfikacija učenja;
- korišćenje tehnologije za unapređenje učenja i poučavanja, npr. fokusiranje na sadržaj koji generišu korisnici i interakcija između korisnika putem blogova, foruma, društvenih mreža i sl.;
- pružanje informacija i razmena pravovremenih povratnih informacija (feedback) korišćenjem IT-a.

Ovi koncepti zahtevaju primenu informaciono-komunikacionih tehnologija u nastavi i učenju što uključuje:

- računarski-zasnovano učenje/obuka, koja obuhvata oblike nastave koji ističu upotrebu računara kao platforme za izvođenje aktivnosti;
- materijale za učenje koji se isporučuju putem računara;
- m-učenje, kao oblik elektronskog učenja gde je platforma za isporuku mobilni uređaj – npr. laptop, pametni telefon ili tablet;
- virtuelna okruženja za učenje: portali koji pružaju pristup podršci za učenje, uključujući informacije o kursovima, komunikaciju (forumi, razmene poruka, najave), sadržaj kursa (beleške i izvori predavanja) i procenu i povratne informacije;
- modele (obično 3D) gde učesnici mogu istraživati i učiti u simuliranom ili virtuelnom okruženju;
- računarsko ocenjivanje/e-ocenjivanje, koje koristi računarske tehnologije za ocenjivanje učenika.
- otvoreno učenje, kojim se resursi za učenje dele putem otvorenih licenci i sporazuma, npr. Masivni Otvoreni Onlajn kursevi (MOOC);
- tehnologije za saradnju i komunikaciju.

## Mogućnosti i izazovi fleksibilnog pristupa elektronskom učenju

Evidentno je da nova tehnologija nudi potencijalne fleksibilnosti u onome što se uči, kako se uči i gde se uči, kao i brojne načine za pristup resursima i informacijama i interakciju sa kolegama i između studenta i nastavnika. Međutim, takva fleksibilnost može stvoriti potencijalnu zabunu, posebno oko odlučivanja šta, gde i kako studirati; može stvoriti preopterećenost informacijama - zbog previše resursa za rukovanje i prevelikog izbora nastavnih materijala. Kako sada i mesto učenja postaje izbor – u instituciji, kod kuće, na poslu ili u pokretu – student se suočava sa novim izazovom izbora odgovarajuće lokacije, razumevanja šta treba da radi i obavljanja potrebnog posla.

Nastavnici imaju mogućnost da planiraju rad sa različitim studentima (individualizacija nastave), da pruže širok asortiman materijala prilagođenih različitim stilovima i kontekstima učenja, uz korišćenje različitih alata i novih medija i načina interakcije i komunikacije. Međutim, sada nastaju poteškoće za nastavnike: kako identifikovati, odabrati i usvojiti pedagoške prakse koje se unapređuju primenom informacionih tehnologija, koje pružaju fleksibilnost i poboljšavaju ciljeve nastavnog rada, i kako razviti sopstvene veštine za njihovo korišćenje.

Za visokoškolske institucije otvaraju se nove mogućnosti uključivanja većeg broja studenata i novi potencijali za deljenje resursa sa drugim institucijama, ali se pred njih postavljaju i prepreke kako razviti kvalitetne procese i sisteme podrške za planiranje i široku primenu fleksibilnog učenja i kako se nositi sa ponašanjem i zahtevima studenata pod uticajem ovih promena.

Tako se nameću osnovna pitanja kojima se treba baviti prilikom razvijanja moderne pedagogije uz korišćenje elektronskog učenja:

1. Koliko se studenti mogu pripremiti za prirodu fleksibilnog elektronskog učenja, posebno kada/ako se fokus kontrole premešta sa profesora na studenta?
2. U kojoj meri se nastavnicima može pomoći u upravljanju širokim spektrom tehnologija i resursa, i što je još važnije u razvoju pristupa podučavanju koje podrazumeva njihovo efikasno korišćenje?
3. Kako institucije mogu da se izbore sa raznolikošću i fleksibilnošću potrebnom za podršku novim načinima podučavanja i učenja?

## Model kombinovanog učenja

Kombinovano učenje ima za cilj kombinovano korišćenje informacionih tehnologija i tradicionalnih oblika nastave. Porast virtuelnih okruženja za učenje (VLE) kao sveprisutne platforme za hostovanje i isporuku pratećih materijala znači da je, za većinu studenata, neko minimalno iskustvo sa kombinovanim učenjem verovatno već norma. Međutim, tamo gde se VLE isključivo koristi za smeštanje kopija beleški i slajdova sa predavanja, ovo se može smatrati fleksibilnijom i pristupačnijom bibliotekom, jer studenti mogu pristupiti materijalima kursa u bilo koje vreme i sa bilo kog mesta, ali drugog značaja nema. U pogledu dizajniranja efikasnih aktivnosti nastave i učenja, pružanje materijala sa predavanja može dovesti do toga da studenti ili ne prisustvuju predavanjima ili da se ne uključe u njih. Mala promena pristupa kako bi se ovo izbeglo, na primer, ostavljanje praznina u beleškama sa predavanja koje treba popuniti, može biti efikasna i može preusmeriti kurs ka kombinovanom pristupu, u kome preovladava tradicionalni način rada.

Kombinovano učenje može biti efikasnije kada se neke aktivnosti u stilu predavanja ili radionice zamene mrežnim materijalom – bilo medijskim klipom ili drugim zanimljivim sadržajem – i to se razvije kroz tradicionalne seminare ili neke oblike diskusije ili procene posredstvom računara. Ovaj preokrenuti (izvrnuti) stil učionice ima prednost u tome što je pristup podučavanju i učenju fokusiran na studente. U pogledu fleksibilnosti, studenti moraju biti u mogućnosti da pristupe ekvivalentnim sadržajima isključivo putem mrežnog materijala, što predstavlja izazov za institucije gde je iskustvo u kampusu ključni deo obrazovnog iskustva.

Prednosti kombinovanog učenja su:

- poboljšanje tradicionalnih kurseva predavanja kroz samostalni rad, pri čemu je fleksibilnost obezbeđena u nekim modulima u okviru programa;
- isporučivanje materijala elektronskim putem sa ograničenim zahtevima za interakciju u realnom vremenu;
- učenje na daljinu uz minimalnu količinu zahteva u realnom vremenu.

## Izvrnuta učionica

Prema napred navedenom, jasno je da kombinovano učenje možemo jednostavno definisati kao aktivnost podučavanja i učenja koja kombinuje fizičke aktivnosti licem u lice sa učenjem koje koristi nove informaciono-komunikacione tehnologije. Izvrnuta, okrenuta ili obrnuta učionica jeste element kombinovanog učenja koji integriše i učenje licem u lice u toku časa kroz grupnu diskusiju i učenje na daljinu van časa, praćenjem asinhronih video lekcija i onlajn saradnju. (Heilesen, 2010; Lean, Moizer i Nevberi, 2014; Poon, 2014).

Poslednjih godina izvrnuta učionica postala je jedna od novih tehnologija u obrazovanju i polako postaje standard nastave i učenja, jer podstiče aktivno učenje studenata u visokom obrazovanju. Podučavanje kroz preokrenutu učionicu jeste pristup nastavi i aktivnosti učenja u kome studenti gledaju video čas izvan učionice putem učenja na daljinu i imaju praktične aktivnosti uživo u učionici.

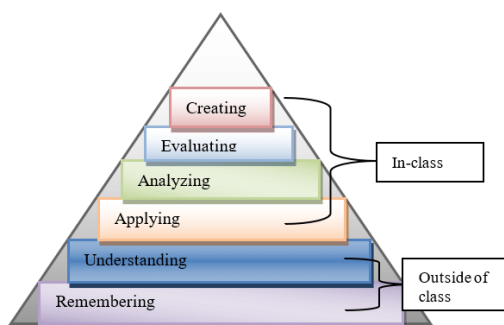
Izvrnuta učionica poznata je i kao pristup učenju usmeren na studenta, što znači da su učenici aktivniji od nastavnika u učionici. U ovom slučaju, profesor se može smatrati „facilitatorom” (ne „tutorom”) sa zadatkom da motiviše, usmeri i da povratne informacije o radu studenta. Prema tome, primenjujući ovakav pristup aktivnosti podučavanja i učenja, nastavnik može promeniti tradicionalno predavanje video zapisom, koji studenti mogu da slušaju bilo gde izvan učionice. Preokrenuta učionica omogućava studentima da gledaju video u željeno vreme i više puta po potrebi, tako da mogu učiti svojim tempom. Ova vrsta aktivnosti takođe povećava međusobnu saradnju studenata u učenju na daljinu van odeljenja. Dakle, prevrtanjem odeljenja studenti ne provode toliko vremena slušajući duga predavanja u učionici, te imaju više vremena za rešavanje problema individualno ili u saradnji kroz učenje na daljinu sa vršnjacima. Ovakav pristup nastavi i učenju, takođe doprinosi boljem razumevanju upotrebe tehnologije u nastavi i aktivnosti učenja; studenti će koristiti različite tehnološke medije u samostalnom učenju, dok će predavač u svojim nastavnim praksama koristiti različite tehnološke medije.

Izvrnuta učionica zasnovana je na teoriji revidirane Blumove taksonomije kognitivnog domena znanja. Ova taksonomija pruža šest nivoa učenja. Objašnjenje je raspoređeno od najnižeg do najvišeg nivoa:

- 1. Sećanje:** U ovoj fazi studenti pokušavaju da prepoznaju informacije koje su primili i da ih se prisete i pokušavaju da shvate osnovne pojmove i principe sadržaja koje su naučili.
- 2. Razumevanje:** Studenti pokušavaju da pokažu svoje razumevanje, tumače informacije i rezimiraju ono što su naučili.
- 3. Primena:** Studenti vežbaju ono što su naučili ili primenjuju stečeno znanje na stvarne situacije.
- 4. Analiziranje:** Studenti koriste svoje kritičko mišljenje u rešavanju problema, vode debate sa prijateljima, upoređuju odgovore sa vršnjacima i prave rezimee. Studenti stiču nova znanja i ideje nakon izgradnje kritičkog mišljenja ili debate u grupnim aktivnostima. Na ovom nivou, učeći, studenti proizvode kreativno razmišljanje.
- 5. Ocenjivanje:** Procena ili urađena revizija znanja, značajni su rezultat koji se ostvaruje kroz odnose. U ovoj fazi studenti samoprocenjuju ili međusobno procenjuju celokupne koncepte učenja i mogu da donesu sud o tome koliko su uspešno naučili.

**6. Stvaranje:** Studenti su sposobni da samostalno dizajniraju, konstruišu i proizvedu nešto novo primenjujući stečena znanja (Bloom, 1969).

U konceptu izvrsne učionice, pamćenje i razumevanje, kao najniži nivo kognitivnog znanja, vežbaju se van časa predavanja (Kratzwohl & Anderson, 2010). Dok su bili u učionici, studenti su bili usredsređeni na više oblike kognitivnog rada, uključujući primenu, analizu, procenu i stvaranje. Sledeća slika ilustruje nivoe učenja studenata u izvrsnom učenju prema Blumovoj revidiranoj taksonomiji.



U preokrenutom modelu, niži nivoi znanja predstavljaju se pre nastave kroz snimljena predavanja i video. Materijali za čitanje, simulacije i drugi materijali takođe pružaju osnovnu podršku učenju tako da se vreme u nastavi uživo može provesti radeći na višim nivoima učenja od primene do evaluacije.

U konceptu izvrsne učionice učenici prelaze sa najnižeg nivoa (pamćenje) da bi postigli najviši nivo (stvaranje). Lankford (2013) je napomenuo da se okrenuta učionica fokusira na to kako podržati učenike u dostizanju višeg nivoa taksonomije. Pored toga, Nederveld i Berge (2015) dodali su da su u obrnutom učenju aktivnosti u učionici usmerene na postizanje višeg nivoa učenja, a ne na slušanje predavanja i drugih misaonih zadataka nižeg nivoa.

### Interpretacija „tutorstva”

U kontekstu izvrsne učionice usvojena je, dakle, perspektiva koja predavača ne smatra nastavnikom – „tutorom”, već studenta stavlja na mesto ključnog učesnika u obrazovanju. Student po-staje „tutor” i preuzima vođstvo. Ovo podrazumeva da, pored kursa dizajniranog tako da u centar stavlja nastavnika i koji je baziran na predavanjima, radionicama i slično, postoji deo vremena posvećen vršnjačkom podučavanju. Nastavnici odlučuju o tome koji će ciljevi biti ostvareni ovim pristupom u podučavanju: npr. razvijanje aktivnih istraživačkih kompetencija, razvijanje komunikacionih kompetencija, razvijanje kompetencija kritičkog mišljenja.

Podučavanje se realizuje po tutorskim grupama, dok veličina grupe varira u zavisnosti od nivoa studija. Obično su grupe veće na osnovnim studijama i smanjuju se sa porastom nivoa studiranja. Tutore obučava i nadgleda nastavnik. Ovo takođe omogućava redovnu internu reviziju kako bi se evidentirale tutorske aktivnosti na nivou kursa. Interna revizija omogućava tutorima da razmenjuju iskustva i doprinosi poboljšanju veština podučavanja. Tutori rade redovno sa studentima (npr. jednom ili dva puta nedeljno). Njihove aktivnosti podstiču grupnu saradnju i oni se trude da razviju saradnju među studentima i razmenu povratnih informacija. Predstavićemo sada zadatke koje nastavnik može staviti

pred tutora, kako bi se realizovao koncept izvrsne učionice i upoznali novi alati koji doprinose poboljšanju nastavnih kompetencija i kvaliteta nastave.

## Obrazovna interakcija i komunikacija

### Klipovi znanja

Terminologija koja se koristi u edukativnim video materijalima varira u zavisnosti od namene. Ova nastavna tema olakšava savladavanje predstojećih ciljeva učenja:

- Odabir razvojnog okruženja za klipove znanja, shodno cilju učenja,
- Procena postojećeg videa znanja, na osnovu tehničkih i funkcionalnih kriterijuma,
- Dizajniranje i primena sopstvenih klipova znanja uz procenu njihovih jačih i slabijih strana.

Video klipovi su postali ključni edukativni sadržaj u onlajn visokom školstvu. Tokom pandemije virusa korona, moć i uloga video materijala došla je u prvi plan. Može se primetiti da su u upotrebi nekoliko tipova video materijala:

- Prenos uživo (engl. streaming video),
- Snimci celih lekcija (engl. full lesson recordings),
- Klipovi znanja (engl. knowledge clips).

Klipovi znanja imaju specifičnu namenu i stoga je potrebno posvetiti im se na odgovarajući način. Naziv "klipovi znanja" (engl. knowledge clips) prirodno ukazuje na njihovu svrhu: pokušaj da se postignu ciljevi učenja kratko i jasno. Kada kažemo kratko, mislimo na to da jedan video materijal ne treba da traje duže od 10 minuta. Polazna tačka prilikom kreiranja ovih klipova, treba da bude dobro definisani cilj učenja. Svako ko želi da razvije klip znanja treba jasno da definiše svoj cilj učenja, prikupi sve potrebne informacije i materijale o njemu, napiše skripta i potom otpočne snimanje video sadržaja.

### Definisanje smernica za dizajn video materijala

Postavlja se pitanje šta se može naučiti o dizajnu video materijala empirijskim istraživanjem.

Literatura i istraživanja o klipovima znanja/video klipovima u nastavi, obično dolaze do zaključka da je efekat koji je postignut pozitivan. Međutim, dobro je naglasiti da efekat ne mora biti nužno i uvek pozitivan. Veliku ulogu u efikasnosti igra širi koncept nastavnog procesa. Preradović i saradnici (2020) ističu dve važne karakteristike koje su u bliskoj vezi sa integracijom: „preview the task” i „strengthen the demonstration with practice”. Preporuka je da pre gledanja video klipa/klipa znanja, studenti prethodno steknu potrebno znanje za gledanje i analizu video sadržaja. Takođe, klip ne može i ne treba da postoji nezavisno. Nakon gledanja video klipa, studenti treba da praktično primene stečeno znanje, na osnovu znanja i iskustva koje su stekli u video materijalu koji su pogledali.

Istraživanje na temu video zapisa ni jednog trenutka ne postavlja pitanje da li su video materijali korisni ili nisu. Uloga istraživanja uglavnom je takva da se razume zašto upotreba video sadržaja ima efekta i koja dizajnerska rešenja daju najbolje efekte. Kao inspiraciju, dajemo nedavnu studiju u kojoj su analizirani najpopularniji YouTube video snimci nastave.

Ten Hove i Van der Meij ([tenHovevanderMeij2015.pdf](#)) postavili su studiju u kojoj je analizirano 250 popularnih video klipova. Ovo istraživanje govori o klipovima znanja koji se odnose na

deklarativno znanje. Dakle, fokus je na konceptualnom, činjeničnom znanju, koje nije povezano sa procedurama, pristupima i procesima.

Rezultati istraživanja pokazuju da najpopularniji video klipovi imaju sledeći sadržaj i tehničke karakteristike dizajna:

- Visoka rezolucija video snimka i oštra slika, kako bi studenti sadržaj mogli da vide jasno i detaljno. Naravno, visoka rezolucija će usporiti preuzimanje video materijala i opteretiti protok prilikom postavljanja i slanja video sadržaja, ali shodno današnjim standardima minimalna rezolucija video materijala treba biti visoka (danas je to HD 1080).
- Dodavanje statičnih slika u video klip. Možda zvuči kontradiktorno, ali dodavanje slike u video snimak tačno kada je to potrebno (prostorno i vremenski povezano) poboljšava kvalitet učenja. Stručnjaci razlikuju dve vrste statičkih dodataka: ikonične slike i analitične slike. Ikonične slike predstavljaju šematske slike koje su izvedene iz stvarnih slika ili same slike realnosti. Sa druge strane, analitične slike predstavljaju dijagrame, grafikone, mape, obrasce itd.
- Dodavanje dinamičkih figura u video snimak, može biti od izuzetne koristi, jer može da demonstrira različite procese i da prikaže zanimljive animacije. Ukoliko na primer govorite o glečerima i njihovom pomeranju, bilo bi dobro da to pomeranje i vizualizujete. Ukoliko govorite o apstraktnim pojmovima ili procesima koje student ne može da zamisli, poput mitoze i mejoze, studenti će bolje razumeti lekciju ukoliko uz nju vide i dinamične figure, umesto statične slike.
- Raznolikost naslova, zvukova i glasova. Govorni tekst je izuzetno koristan i cenjen, ali oprežno! Ono što je rečeno, ne mora biti doslovno prikazano kao tekst. Prema istraživanjima, dodavanje uvodne muzike, pozadinske muzike tokom videa, dodavanje zvukova (npr. prilikom ulaska neke figure), ne doprinosi popularnosti i prijemčivosti video materijala. Budite oprezni prilikom dodavanja zvukova, jer se može desiti da odvlače fokus sa video snimka. Kada dodajete muziku, činite to tako da se muzika „ne nadmeće” sa porukom koju izgovarate.
- Tempo: Iznenađujući rezultat jeste da je tempo popularnih video zapisa prilično visok.

Moussiades i kolege (2019), na osnovu teorijske i empirijske analize, dolaze do sledećih rezultata:

- Budite kratki ali sveobuhvatni,
- Koristite razgovorni stil izlaganja,
- Obratite pažnju na estetiku videa,
- Kontrolišite brzinu govora, jer se smatra da se učešće učenika povećava proporcionalno brzini govora,
- Definišite ciljnu publiku,
- Ne preopterećujte slajdove tekstom,
- Koristite naraciju,
- Pružite jednostavne slike,
- Sinhronizujte audio i vizuelnu poruku,
- Podržite različitost,
- Kontrolišite tempo izlaganja,
- Pridržavajte se principa signalizacije,

- Napravite uvodne napomene ili nagoveštaj o predznanju koje je u korelaciji sa temom,
- Organizujte video zapise u odeljke,
- Koristite naslove.

Stavimo sada akcenat na sticanje znanja – znanje u vezi sa procesima, pristupima, detaljnim planovima, procedurama itd. Ovo je, naravno, drugačija vrsta zahteva, jer je naglasak na podršci višesenzornim znanjima. Kao što već znamo, za bavljenju proceduralnim znanjem, potrebno je dobro savladati veliki broj veština deklarativnog znanja. U suprotnom, ne bi bilo moguće razmotriti određene činjenice, koncepte, odnose i teorije u procesu učenja o postupcima. Ovo implicira sledeća pitanja: Da li je na raspolaganju dovoljan nivo predznanja i/ili je potrebno predznanje dovoljno sveže, pre nego što se fokus skrene na proceduralno znanje?

Istaknimo da postoji mali broj pristupa za razvoj ove vrste video klipova, koji su zasnovani na dokazima. Sumirajmo karakteristike edukativnih, uživo nastalih, video snimaka na sledeći način:

- **Vidljivost:** Drugim rečima, da li je na video snimku sve učinjeno vidljivim. Ovde se pre svega misli na aspekte svetla, rezolucije i kompletnosti slika. Na primer, skok sa motkom treba da ima jasan uvod u hodanje, držanje motke... Kada neko svira violinu, pažnju treba obratiti na držanje tela, držanje gudala, položaj prstiju... Međutim, ovo su bili primeri gde je relativno lako moguće dočarati kompletnost slika. Nekada se možete susresti sa problemima, kada želite da nešto učinite „vidljivim”. Na primer ukoliko pravite video snimak za izgovor reči na španskom jeziku, potrebno je odvojiti više vremena, odabrati adekvatne primere i angažovati nekoliko ljudi (različitih polova) za izgovor tih reči.
- **Usnimljivost:** Odnosi se na stepen do koga može biti obuhvaćen čitav proces kreiranja video materijala. To često zahteva dodavanje dodatnog materijala nakon snimanja, kako bi se povezali svi aspekti procesa, postupaka, kompetencija, recimo od dodavanja strelica, okvira, teksta pa do reprodukcije dela snimka. Istraživači se ovde osvrću i na autentičnost i proverljivost iskustava prikazanih u video snimku, korišćenje postavke, opreme, alata, instrumenata, materijala... Takođe, veoma je bitno da demonstracija koju izvodi nastavnik, studentu mora biti dovoljno jasno prikazana, kako bi sam mogao da je izvede. Nastavnik prilikom demonstracije mora obratiti pažnju na položaj koji zauzima u kadru, redosled i postupak radnji koje izvodi, ali takođe i na izvodljivost radnje od strane studenta.
- **Uporedivost:** Odnosi se na uporedivost rada studenta sa radom koji je profesor pokazao tj. da li je ono što student na kraju radi u skladu sa onime što je trebalo uraditi. Na primer, ukoliko govorimo o muzici, treba razmotriti da li je tempo kojim se predavač u video materijalu vodi prebrz? Da li je tempo dostižan? Razmotriti pre da li je video dovoljno postupan i podeljen na manje delove, nego očekivati izvođenje pune melodije? Da li predavač svira na instrumentu koji u mnogome premašuje kvalitet instrumenta koji učenik poseduje?

## Privatnost i autorska prava

Ma šta radili, uvek treba imati na umu da treba voditi računa o privatnosti i autorskim pravima. Kada se snimaju ljudi, oni mogu biti prepoznati i identifikovani u video snimku. Postavlja se pitanje: Da li su ljudi dali dozvolu za snimanje? Da li su poštovana autorska prava nad fotografijama, tekstovima, animacijama, slikama,... Poštovanje autorskih prava otpočinje tačnim navođenjem izvora, a doseže do toga da je plaćeno pravo na korišćenje izvora. Moramo reći i to da dozvola na autorska prava umnogome zavisi od toga kako će se krajnji proizvod distribuirati i da li će biti korišćen u komercijalne svrhe. Na primer, ukoliko se za obrazovni kurs koriste fotografije sa IStock sajta, moraju



se platiti takse za upotrebu tih fotografija u obrazovne svrhe. Kada radite na internom nivou, možete imati slobodu za korišćenje tuđeg autorskog dela, ali budite oprezni kada krenete sa distribucijom svog krajnjeg proizvoda. Kada se započne sa distribucijom ili deljenjem projekta (daje pristup proizvodu) sa drugim ljudima, treba se pridržavati važećih propisa. Postoji veliki broj veb stranica koje nude audiovizuelne materijale besplatno, i mogu se koristiti bez bojazni o autorskim pravima (pod uslovom da na kraju video snimka navedete izvor materijala koje ste koristili).

### Kreiranje studentskih video materijala

Kada pogledamo kontekst ove teme, možda će zvučati čudno da tražimo od studenata da naprave video materijal na zadatu temu, u sklopu nekog zadatka ili projekta. Takvi video klipovi će na dinamičan način pokazati šta studenti mogu da urade. Takođe, takvi video snimci će predavaču pokazati šta sve studenti mogu da urade, može se videti kako rade samostalno na zadatku, kako se izražavaju, objašnjavaju, koriste audiovizuelne sadržaje i tome slično. Kada se pogleda sa druge strane, ovo nije ni malo čudno, jer se mnogi ciljevi učenja prema Blumovoj taksonomiji ne mogu te-stirati ili ostvariti na papiru ili bez nekog oblika interakcije. Tako studenti mogu pokazati da mogu nešto da stvore (npr. izvedu muzičko delo, samostalno razviju dokaz u nekom zadatku, razrade tekst i tome slično) ili da pristupe zadatku na nivou ocenjivanja i procenjivanja (npr. sprovedu eksperiment, daju ocenu umetničkog dela, provere rešenje hemijske reakcije i tome slično) ili da analiziraju nešto (npr. uporede dva ekonomska sistema, opišu veze između klime i ekonomije i tome slično). Naravno, sve ovo se može uraditi i „na papiru”, ali kada studenti isto primene na video zapisu, rezultat je mnogo ubedljiviji, ličniji i ima potpuniji efekat. Štaviše, znamo da će studentima za ovo biti potrebna priprema, ponavljanje, ponovno snimanje istih kadrova po nekoliko puta i na kraju objedinjenje svega što su radili u „najbolju verziju” svog procesa rada. Na primer, profesor muzike ovo može koristiti za uvežbavanje muzičkih dela.

Kada učenici snime i pošalju svoj video materijal, prvi segment narednog časa sa njima bio bi pregled i analiza njihovog video snimka. Na ovaj način svako od učenika dobija povratnu informaciju i ta povratna informacija je strukturirana, sistematična (obično se daje popunjavanjem kontrolnih listi) i moguće je usmerenje učenika ka njegovom cilju. Princip povratne informacije daje dobar sistem koji se može koristiti u nastavnoj praksi i kao osnova za vrednovanje učenja i napretka učenika kroz vreme.

### Alati

Možemo razlikovati dve vrste alata:

1. Alati za razvijanje video klipova sa uputstvima.
2. Opšti alati za video montažu. U ovoj kategoriji se može pronaći mnoštvo profesionalnih alata sa kojima se mogu razviti napredne aplikacije. Danas su alati toliko jednostavni za upotrebu i na raspolaganju je toliko propratnog nastavnog materijala, te je sve nadohvat ruke nastavnici. Na primer, nastavnici mogu koristiti neke od sledećih softvera: Comatasia, iVideo, Moviemaker, Pinnacle ili neki od alata koje mogu naći na internetu. Bez obzira na to koji se alat koristi, gotovo svi alati imaju iste funkcionalnosti. Čak i na pametnom telefonu može se instalirati pristojan softver za montažu video materijala.

Često se postavlja pitanje: Zar nije potrebna skupa oprema za snimanje? Odgovor je – Ne. Većina jeftinih kamera, pa čak i pametnih telefona (rezolucija HD 1082) mogu da snime veoma

kvalitetan video sadržaj. Treba obratiti pažnju samo na kvalitet zvuka, pozadinsku buku i šumove koji mogu pokvariti celokupni doživljaj. Međutim i tu postoji relativno jeftino rešenje, a to je kupovina dodatnog mikrofona, koji će odmah poboljšati kvalitet snimljenog sadržaja.

## Interaktivni video sadržaji

Interaktivni video sadržaji veoma su dobar alat u nastavi i učenju i umnogome olakšavaju savladavanje sledećih ciljeva učenja:

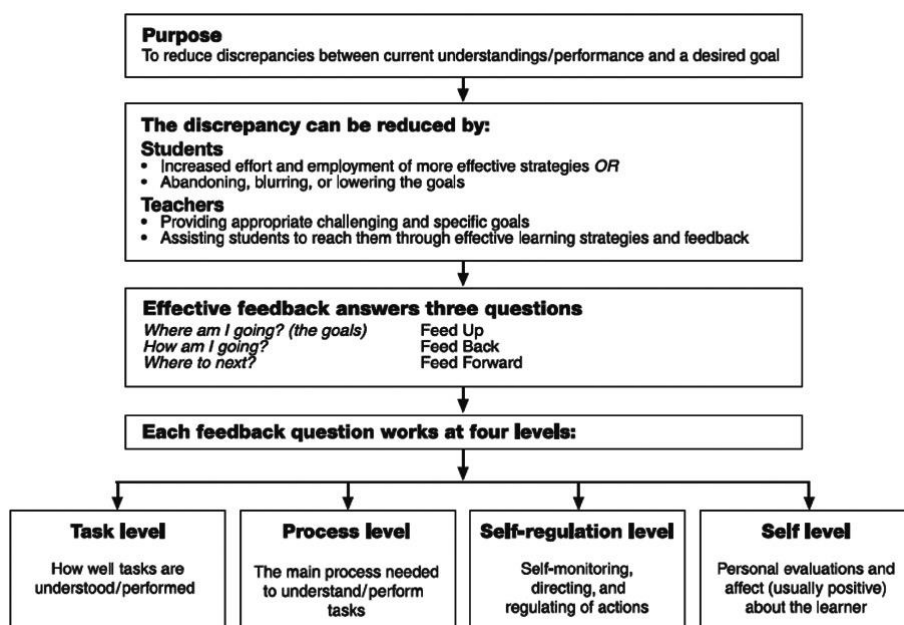
- Navođenje, obrazlaganje, argumentovanje i vrednovanje interaktivnog video sadržaja;
- Korišćenje dostupnih video materijala ili isečaka video materijala, kao osnove za dodavanje interaktivnih sadržaja;
- Procena kvaliteta interaktivnog video sadržaja, na osnovu kriterijuma.

Na sledećoj web stranici, nalaze se različiti alati koji video mogu učiniti interaktivnijim. Odmah se primećuje da postoji veliki broj alata i da je važnost interakcije snažno naglašena: <https://practicedtech.com/2020/02/24/how-to-create-interactive-videos-three-options/>

### Tipovi interakcije u video sadržaju

Zašto je interakcija toliko važna?

U prethodnoj temi smo istraživali o klipovima znanja u edukaciji i naveli smo istraživanja o potencijalnim pozitivnim efektima ovog oblika interakcije i komunikacije. Međutim, u istraživanju se, takodje, navodi da pozitivni efekti mogu brzo nestati zbog nedostatka „interakcije”. Ovo nas dovodi do pitanja: Kako implementirati interakciju, prilikom pasivnog gledanja video predavanja?

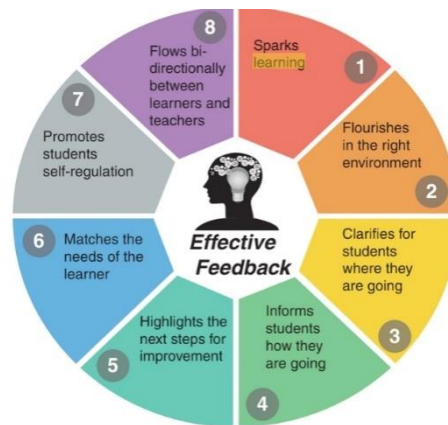


Istraživanja o tome „šta je efikasno u obrazovanju” često se vraćaju na rad Hattie (2009), koji u svojoj knjizi o učenju iz 2015. godine ističe ulogu povratnih informacija, dok Hattie and Clarke (2018, p. 6) pojašnjavaju ulogu povratne informacije. Na osnovu analize ranijih istraživanja (Hattie,

2009), već je naglašeno da bez obzira na to da li imaju povratne informacije, efekat učenja ima vrednost 0.75, što znači da 50% učenika ima bolji učinak nakon što dobije povratne informacije. Nastavnik vrednuje značaj povratnih informacija, ali takođe pita učenike šta očekuju od povratnih informacija. Zapanjujuće je da učenici uglavnom očekuju povratne informacije koje odgovaraju na njihova pitanja poput “Šta dalje?” Danas su povratne informacije normalan i važan segment u procesu učenja, gde ocenjivanje nije krajnja tačka procesa učenja, već je akcenat na studentu i predavaču. Može se reći da danas postoji i neka vrsta „kulture povratnih informacija”. Na osnovu istraživanja Hattie & Clarke (2018) opisuju sledeće karakteristike kulture povratnih informacija (2015):

- Povratne informacije su deo kulture ocenjivanja,
- Rešavanje grešaka je normalan proces učenja,
- Povratna informacija je fokusirana na zadatak a ne na osobu,
- Rezultat davanja povratne informacije nije ocena, već je fokus na usmerenju studenata šta uraditi dalje i kako poboljšati svoj rad

Karakteristike dobre povratne informacije date su na sledećoj slici (Hattie & Clarke, 2018)



Mi ćemo se nadovezati na prethodno navedenih osam karakteristika davanja povratne informacije. Iz literature takođe saznajemo da se povratne informacije odnose na tri bitna pitanja:

- Šta sam do sada postigao u funkciji postavljenih ciljeva učenja?
- Da li sam ciljeve učenja postigao efikasno?
- Čime se mogu dodatno pozabaviti ili kako mogu poboljšati/prilagoditi rad?

Hattie and Timperley (2007) ovo nazivaju feed up, feed back i feed forward. Istraživanja pokazuju da se dva najjača oblika povratnih informacija odnose na zadatak i proces rada.

Postoji i drugi način pokretanja interakcije u video zapisima, dodavanjem pitanja i zadataka. Takođe i ovde odmah možete uočiti da je prethodno „pasivan” način gledanja video zapisa lošiji. Učenici moraju da „obrade” nove informacije na kognitivnom nivou. Procesi obrade na kognitivnom nivou veoma su raznovrsni: upoređivanje, predviđanje, izvođenje zaključaka, rekapitulacija, prevođenje, odabir između više opcija, itd. Dodavanje pitanja i zadataka prouzrokuje ponašanje koje se takođe može klasifikovati prema Blumovoj taksonomiji.

BLOOM'S TAXONOMY DIGITAL PLANNING VERBS					
REMEMBERING	UNDERSTANDING	APPLYING	ANALYZING	EVALUATING	CREATING
					
Copying Defining Finding Locating Quoting Listening Googling Repeating Retrieving Outlining Highlighting Memorizing Networking Searching Identifying Selecting Tabulating Duplicating Matching Bookmarking Bullet-pointing	Annotating Tweeting Associating Tagging Summarizing Relating Categorizing Paraphrasing Predicting Comparing Contrasting Commenting Journaling Interpreting Grouping Inferring Estimating Extending Gathering Exemplifying Expressing	Acting out Articulate Reenact Loading Choosing Determining Displaying Judging Executing Examining Implementing Experimenting Hacking Interviewing Painting Preparing Playing Integrating Presenting Charting	Calculating Categorizing Breaking Down Correlating Deconstructing Linking Mashing Mind-Mapping Organizing Appraising Advertising Dividing Deducing Distinguishing Illustrating Questioning Structuring Integrating Attributing Estimating Explaining	Arguing Validating Testing Scoring Assessing Criticizing Commenting Debating Defending Detecting Experimenting Grading Hypothesizing Measuring Moderating Posting Predicting Rating Reflecting Reviewing Editorializing	Blogging Building Animating Adapting Collaborating Composing Directing Devising Podcasting Wiki Building Writing Filming Programming Simulating Role Playing Solving Mixing Facilitating Managing Negotiating Leading

Budući da je ovakvo ponašanje više od samog gledanja i slušanja, možemo zaključiti da se iz ovakvog gledanja video klipova može i daleko više naučiti. Prilikom revizije rezultata ove teme treba se više puta osvrnuti na Blumovu taksonomiju, kako bi se videlo da li pitanja/ komentari izazivaju dovoljno jak efekat u kognitivnoj obradi. Za još primera koji se uklapaju u taksonomiju, dovoljno je u pretraživaču ukucati „Bloom Taxonomy” i pronaći će se mnoštvo stvari i pojmova koji odgovaraju oblasti i domenu interesovanja. Zbog toga se u pretragu može dodati i domen: matematika, fizika, istorija, ekonomija, umetnost.

### Uputstvo za dizajniranje interaktivnih video materijala

Postoje dva pristupa dizajniranju interaktivnih video materijala:

1. Dodavanje pitanja u postojeće klipove znanja/video klipove
2. Davanje povratne informacije/komentara na video koji je poslat

Za dodavanje pitanja u video materijal koristi se alat Edpuzzle. Rad sa ovim alatom može početi na sledećem linku <https://edpuzzle.com/>, gde se može kreirati besplatan nalog. Edpuzzle interaktivne video materijale možete gledati samo ukoliko imate prethodno kreiran svoj nalog na toj platformi. Kada se pusti video snimak, primećuje se da se video iznenada zaustavlja i traži se odgovor na postavljeno pitanje.

Kako se pravi takav interaktivni video?

Postupak pravljenja interaktivnog videa detaljno je objašnjen u sledećem video klipu: <https://www.youtube.com/watch?v=L9h86-UmLyg>

Kao što na prethodnom linku možete videti, za kreiranje interaktivnih video materijala korišćenjem Edpuzzle alata, mogu se koristiti sopstveni ili već postojeće video materijali. U postavljenu video materijal mogu se dodati različite vrste pitanja (pitanja sa otvorenim odgovorom ili pitanja sa odgovorom višestrukog izbora) zavisno da li se daju povratne informacije ili ne. Sva uputstva možete vrlo lako pronaći na internetu. Ono šta želimo da naglasimo jeste da ne treba insistirati na tome da se kreira javni sadržaj. U radu sa studentima, koriste se radni javni sadržaji, nudi im se serija interaktivnih videa i odmah dobija povratna informacija o tome kako savladavaju gradivo, na osnovu odgovora koje daju u video klipu.

U svrhu davanja povratne informacije na video koji je napravljen može da se koristi alat Videoant koji omogućava da se pruži povratna informacija o video snimku drugih. Ovaj alat razvio je Univerzitet u Minesoti i dao je dobre rezultate u obrazovnim programima. Uvod u Videoant može se pogledati na sledećem linku: <https://youtu.be/1SOE2aQky2I>.

Pomoću Videoant alata mogu da se dodaju napomene u postojeći video. Postoji mogućnost da se sačuva originalni video zapis i na određene isečke videa mogu se dodati napomene. Video sa pridodatim napomenama, može da se vrati tvorcu video snimka, kao povratna informacija na njegov rad. Prilikom gledanja videa može se razmatrati više aspekata:

- Davanje povratnih informacija o izgovoru prilikom usmene prezentacije,
- Davanje povratnih informacija o opisu nekog rešenja,
- Davanje povratnih informacija prilikom demonstracije / izvođenja nekog dela,
- Davanje povratne informacije prilikom diskusije gde student mora da ubedi drugog studenta u svoju tvrdnju.

Može se primetiti da se video sa povratnim informacijama može kreirati u gotovo svim domenima obrazovanja.

Da biste otvorili Videoant, najpre je potrebno otvoriti besplatan nalog i tom prilikom se nekada mogu dobiti sugestije kako ga je najbolje koristiti.

### Efekat davanja povratne informacije

Kao uvod u temu o uticaju interaktivnih video materijala u visokom obrazovanju, osvrnućemo se na istraživački članak na ovu temu Mahoney, Macfarlane & Ajjawi, 2019. Budući da je ovo pregledna studija, odmah se može dobiti široka slika i uvid u različite pristupe povratnih informacija putem videa. Zanimljivo je to da se efekti ne ispituju samo iz ugla učenika/studenata, već i iz ugla nastavnika.

Kao primer povratnih informacija zasnovanih na video zapisima u visokom obrazovanju, navodimo studiju o učenju jezika (engleski kao strani jezik). Özkul i Ortactepe (2017) otkrili su da su povratne informacije zasnovane na video materijalima efikasnije od tradicionalnih oblika povratnih informacija.

Kao i za davanje povratne informacije, možemo reći da isto važi i za dodavanje interakcije u video sadržaj. Hattie (2009) ukazuje da upotreba interaktivnog videa ima efekat od  $d = 0.54$  na kvalitet učenja. Nedavna studija iz 2019. godine (Anderson & Davidson, 2019) potvrđuje ovu analizu,

upoređujući klasičan pasivni video sa interaktivnim gledanjem video zapisa. Njihovo istraživanje ispituje moždane funkcije povezane sa učenjem. Zaključci ističu različite vrste ciljeva učenja koji se postižu receptivnim gledanjem video zapisa naspram interaktivnog gledanja. Dodavanjem interakcije u video klip dostižu se viši nivoi u ciljevima učenja, primeni, analizi i ocenjivanju.

Treba imati u vidu i to da se dodavanjem ciljanih pitanja u video klip, takođe mogu odmah postaviti temelji za drugačiji pristup proceni zasnovan na interaktivnom videu.

Naredna tabela daje procenu efekata učenja od strane uključenih studenata:

Question	No Gain	A Little Gain	Moderate Gain	Good Gain	Great Gain
Increased confidence that you understand the material	1%	3%	23%	48%	24%
Increased your learning in this course	1%	7%	16%	41%	36%
Increased your understanding of how ideas from this video relate to ideas encountered in the course	3%	5%	20%	39%	34%
Increase your understanding of how ideas encountered in the course relate to helping people address real world issues	3%	6%	18%	30%	44%
Increased your ability to remember the content covered in the video	3%	8%	14%	38%	38%
Increased your ability to connect key class ideas with other knowledge	4%	5%	24%	38%	28%

Obratite pažnju da se efekat učenja odnosi na različite oblike „kognitivne obrade”.

## Edukativni poster

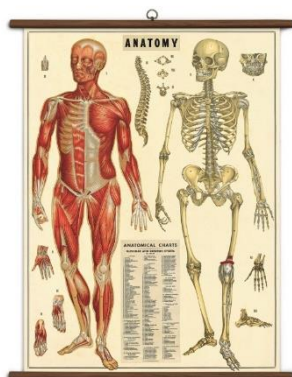
Nakon što proučimo ovu temu, kroz predstavljanje pomalo zaboravljenog načina učenja savlađaćemo sledeće ciljeve učenja:

- Značaj i položaj postera u 21. veku,
- Povezivanje dizajna postera / plakata sa ciljevima učenja u visokom obrazovanju,
- Ključni principi u dizajniranju edukativnih postera,
- Procenjivanje obrazovne vrednosti postera.

Poster ili plakati predstavljaju deo „nasleđa” u obrazovanju. Pored upotrebe table, upotreba plakata seže u daleku prošlost. Ponekad su se plakati nazivali i zidnim kartama. Od 18. veka na ove zidne karte se gleda kao na rešenje za vizuelizaciju u obrazovanju (De Buck, 2015). Princip vizuelizacije može se smatrati pretečom onoga što kognitivisti ističu kao značaj „višestrukih predstavljanja”. Tipični zidni plakati prikazivali su: istorijske situacije, geografske pojave, slike u medicini, fizici, matematici, hemiji, biologiji, tehnologiji, itd.

Razvoj štampe u boji, uvođenje priručnika u boji i upotreba multimedije, pri čemu studenti sami mogu da pretražuju, preuzimaju i uređuju statičke i dinamičke slike putem Interneta, potisnuo je značaj klasičnih zidnih postera i karti. Oni su postali muzejski eksponati.

Klasične zidne karte, skrivaju drugačiju upotrebu plakata koja je manje poznata i nedovoljno eksponirana u literaturi i učionici: navođenje učenika da sami dizajniraju i razvijaju postere/plakate.



Ovde nećemo razmatrati dekorativnu ulogu postera, niti postere kojima je cilj naglašavanje neke propagandne ideje, slike ili slogana. Naravno da i takvi plakati mogu imati određenu vrednost u edukaciji (npr. promocija bezbednog saobraćaja, zdrave hrane, čitanja, tolerancije, nenasilja) ali oni ovoga puta nisu deo naše teme.

Sledeći članak Stone-a (1929, str. 1535) sadrži rane primere studenata koji prikupljaju i dokumentuju hemijske elemente putem plakata (ibid, str. 1538): „Kako se prave šibice”. Sa obrazloženjem: „Centralna slika prikazuje Bendžamina Franklina kako sedi, leđima okrenut kaminu, u kome gori plamen drvene vatre. Ispod su prikazana tri kratka stiha u kojima se navodi da je Bendžamin morao da koristi kremen i čelik da bi zapalio vatru, jer su šibice tada bile nepoznate. Iznad slike proizvođači plakata montirali su malu knjigu koja opisuje kako su izrađivali, oko centra su postavljene cevi koje sadrže različite materijale koji se koriste u proizvodnji šibica, a prikazano je i nekoliko šibica koje su napravili učenici”.



Ovo kratko opisno objašnjenje već pokazuje da je poster rezultat procesa. Učinak učenja se stoga najbolje nalazi u prirodi procesa dizajniranja i razvoja plakata. Do sada dati primeri vrlo su bliski ilustraciji postavki, situacija, događaja i predmeta. Međutim, postoje rani primeri primene u apstraktnom znanju gde je rasuđivanje najvažnije (uzrok-posledica, objašnjenja, poređenja).

Na primer, Bell (1928) je podstakla svoje studente da izrade plakate o tome kako se hemijski procesi mogu boriti protiv stvaranja štetnog dima u fabrikama ili kako se hemijski otpad može preraditi, kako se boriti protiv požara primenom hemijskih procesa ili objasniti rad pesticida kod istrebljenja pacova. Zanimljivo je da Bell takođe izričito navodi da aktivnost plakata možete koristiti za podršku u primeni hemijskog znanja (videti Bloom), ali da se plakati mogu koristiti i za proveru stečenog znanja



Na primer, Bell (1928) je podstakla svoje studente da izrade plakate o tome kako se hemijski procesi mogu boriti protiv stvaranja štetnog dima u fabrikama ili kako se hemijski otpad može preraditi, kako se boriti protiv požara primenom hemijskih procesa ili objasniti delovanje pesticida kod istrebljenja pacova. Zanimljivo je da Bell takođe izričito navodi da aktivnost plakata možete koristiti za podršku u primeni hemijskog znanja (videti Blum), ali da se plakati mogu koristiti i za proveru stečenog znanja.

Conyers (2003) naglašava ulogu plakata u procesima ocenjivanja. Studenti su mogli da odaberu temu (lekciju) kojom bi želeli da se bave iz oblasti. Nakon izrade plakata, usledila je demonstracija postera. Prilikom ocenjivanja, akcenat je stavljen na kriterijume kao što su: tačna interpretacija informacija, organizacija informacija, relevantnost slika i upućivanje na izvore. Berry i Houston (1995) ovo primenjuju na časovima matematike gde učenici kreiraju plakate na času matematičkog modeliranja (npr. iz mehanike). U svom istraživačkom članku navode sledeće ciljeve učenja:

- Podsticanje jasnog i konciznog razmišljanja u matematici,
- Pružanje mogućnosti zajedničkog učenja i diskusije,
- Razvijanje učenja kroz vršnjačko podučavanje i samoprocenu, kao i podučavanje od strane predavača i njegovu procenu,
- Poboljšavanje veština komunikacije,
- Uvođenje aspekta prakse.

Upečatljiv je njihov naglasak na ciljevima učenja „orijentisanim na komunikaciju”, u manje očiglednom domenu znanja kao što je matematika.

Ima smisla koristiti postere/plakate kada sledite kreativne ciljeve. Hasio (2015) je dao učenicima da izrade plakate koji su zatim okačeni u školi i/ili odeljenju. Za postignuti efekat učenja ona kaže: „Sveukupno, ishodi znanja i veština odrazili su se na viši nivo obrade i učenja učenika. Studenti su se jasno i skladno izrazili kroz svoje kreativne plakate i pokazali kompetentnost u rešavanju problema. Takođe su mogli da koriste svoje koncepte, da se uključe i iskažu sebe kroz klasne kritike i prepoznaju da postoje socijalne, istorijske i teorijske perspektive povezane sa njihovom kreativnošću“



Ona se takođe osvrće i na uticaj u kulturi: „Korišćenje kreativnih plakata u učionici ima i kulturni značaj. Plakati deluju na kulturnom nivou pružajući simbolične asocijacije između slika, medijskih figura i vrednosti povezanih sa životnim stilom učenika”.

U drugom primeru, DeCapua i Marshall (2019) koriste engleski jezik za govornike drugih jezika u SAD-u (ovde se nazivaju SLIFE: studenti sa ograničenim ili prekinutim formalnim obrazovanjem, engl. Students with Limited or Interrupted Formal Education). Studenti postere ponovo stvaraju sa ciljem da „Studenti kreiraju i dele poster uređujući ga informacijama koje upoređuju i suprotstavljaju glasove na izborima dve države. Kako je u SLIFE odgovornost za učenje na studentima, nastavnici se prilagođavaju učenicima, radeći sa njima ovu aktivnost u paru. Zajedno, učenici i nastavnici upoređuju dve države: njihove izborne glasove, stanovništvo i druge činjenice koje su odlučili da istražuju. Primećujete kako plakati igraju ulogu u različitim fazama procesa učenja. Naglasak je na traženju informacija o rezultatima izbora, upoređivanju, traženju izjava... Ovde se plakati uklapaju u proces koji se ponekad naziva „učenje putem ispitivanja”. Na polju učenja stranih jezika upotrebu plakata nalazimo i u Cetin i Flamand (2013). Učenici su izrađivali plakate kako bi podržali svoj engleski jezik. Sličan pristup naći ćete kod Aksyanova i Ostrovaya (2015) gde su koristili reklamne plakate.

Prethodni tekst zvuči pomalo „zastarelo” i možda odražava staromodnu perspektivu. Želeli smo da prođemo kroz „istoriju” koja stoji iza plakata, a u sledećim odeljcima ćemo naglasiti koliko je izrada plakata živa kao obrazovna strategija u visokom obrazovanju. Imaćete mogućnost da istražite mnoštvo alata i aplikacija koje su danas dostupne vama i studentima za izradu plakata (<https://www.commonsense.org/education/top-picks/apps-and-websites-for-making-posters-and-kolaži>).

## Ciljevi učenja koji se postižu izradom postera

Primeri u prethodnom odeljku daju prvu ideju koje ciljeve učenja je moguće slediti, dajući učenicima zadatak da kreiraju plakate, međutim nalazimo i puno drugih primera (<https://poorvucenter.iale.edu/ImplementingPosters>):

- Brainstorming,
- Rezimiranje ideja, tekstova, knjiga, itd.,
- Kreiranje mape uma složenih tema,
- Kreiranje i opis pristupa prilikom rešavanja složenijih problema,
- Vizuelizacija problema,
- Hronologija događaja,
- Okrugli sto,
- Venovi dijagrami za određivanje sličnosti i razlika.

Pored deklarativnog znanja, mnoštvo primera ovde naglašava (činjenice, koncepti, strukture, teorije) i ima jak uticaj na sticanje proceduralnog znanja (proces, pristupi, planovi korak po korak). Poster se mogu pronaći u svim domenima znanja, tako da su prilično univerzalno sredstvo. Međutim, mnogi ciljevi učenja postići će se samo kada se poster koristi u širem procesu učenja, što uključuje pripreme aktivnosti i kreiranje postera koji se koriste u pojedinačnim aktivnostima, grupnim aktivnostima ili učionicama.

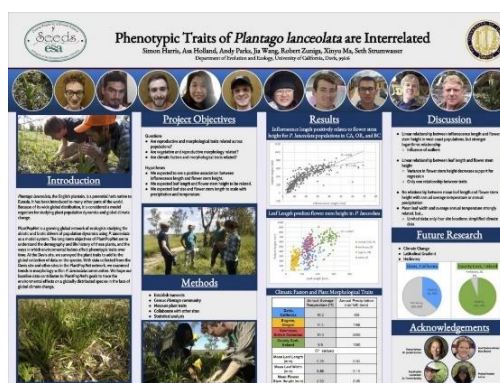
## Primeri postera u visokom obrazovanju

Pogledajmo sledeće primere postera:

- Primer znanja o religiji sa Univerziteta Stanford. (<https://web.stanford.edu/dept/undergrad/urp/SURP/surpawards04/pages/gabrio.htm>)



- Primer primene u medicinskom obrazovanju [https://librari.leeds.ac.uk/info/1401/academic\\_skills/196/presentations\\_posters/4](https://librari.leeds.ac.uk/info/1401/academic_skills/196/presentations_posters/4)



- Primer škole zdravlja, Harvard Univerziteta (<https://www.hsph.harvard.edu/public-health-practice-resources-for-students/resources-for-practicum/communicating-your-practice-experience/student-posters/>).



## Smernice za dizajn plakata u visokom obrazovanju

Na sledećem linku nalaze se radovi studenata na temu postera u visokom obrazovanju:

(<https://www.common sense.org/education/top-picks/apps-and-websites-for-making-posters-and-collages>)

Lista sa smernicama za izradu akademskih i obrazovnih plakata beskonačno je duga. Mi smo odabrali neke primere.

Hay i Thomas (1999) ističu sledeće smernice za dizajn plakata:

**Table 1** Five principles of poster production

<b>Attention-getting</b>	Does the poster make a good first impression? Does it grab the attention of the viewer? This can be achieved through layout, colour, title, and other devices. Getting audience attention is critical to successful communication
<b>Brevity</b>	The poster should make its point(s) concisely
<b>Coherence</b>	An effective poster makes a logical, unified statement requiring no further explanation. It should be intellectually accessible to the intended audience and must be capable of 'standing alone'
<b>Direction</b>	Over-complicated posters discourage and confuse readers. They should be kept simple and focused
<b>Evidence</b>	The argument must be supported by accurate, referenced evidence. The poster must be credible to a critical audience

Berry i Hauston (1995) u svojim matematičkim plakatima dopunjuju navedeno sledećim kriterijumima:

- Da li postoji logična struktura plakata?
- Da li je „zajednička nit” vizuelno podržana?
- Da li ima smislenih naslova?
- Da li je centralni naslov atraktivan, dopadljiv, motivišući za čitanje plakata?
- Da li su ilustracije smislene (umesto čisto dekorativne)?
- Da li je problem jasno istaknut?
- Da li je sve dovoljno kompaktno i sažeto razrađeno?
- Da li postoje neki zaključci?

Duchin and Sherwood (1999) dodatno ističu značaj jezika koji se koristi:

- Da li naslov nije duži od 10 reči?
- Da li upotreba jezika odgovara ciljnoj publici?
- Da li je ciljna publika upoznata sa simbolima, skraćenicama i žargonom koji se koriste?
- Da li je sav snimljeni sadržaj neophodan za prenošenje „poruke”?
- Da li se izbegava nepotrebno ponavljanje?
- Da li se vizuelni jezik takođe koristi sa kombinacijom teksta, fotografija, grafikona, tabela...?
- Da li postoji „način” da dobijete još više informacija?

Kreatori plakata ponekad stavljaju kratak tekst pored plakata ili QR kod pomoću koga se može preuzeti poster i/ili dodatne informacije (pogledajte dodatno objašnjenje putem <https://www.qr-code-generator.com/qr-codes-on/posters/>).

Autori često iznose savete o upotrebi boje, fontova, veličine slova i estetskog efekta. U svakom slučaju važno je odabrati strukturu koja odgovara vašem domenu znanja.

Bližimo se kraju odeljka o smernicama za dizajn, pozivajući se na članak Hubenthal, O'Brien and Taber (2011). Zapanjujuće u njihovom pristupu jeste to što su izneli smernice za dizajn zasnovane na teoriji. U ovom slučaju, to je Kognitivna teorija multimedijskog učenja (CTML van Mayer, 2009). Ova teorija naglašava da svi istovremeno obrađuju informacije različitim senzornim kanalima: npr. čitanje teksta i gledanje animacija; pregledanje vizuelnih elemenata i razumevanje teksta. Oni ističu niz smernica za dizajn koje se svrstavaju u tri dimenzije:

- Estetska dimenzija,
- Kognitivna dimenzija,

- Dimenzija pružanja u vremenu i prostoru.

Prepoznajete kriterijume za estetsku dimenziju, jer se odnose na upotrebu boje, upotrebu slika i raspored u kome je tok (struktura, koherentnost, redosled) centralni. Uz kognitivnu dimenziju, autori ističu vezu sa ciljevima/kurikulumom učenja, u kojoj meri se čitalac/gledalac ispituje ili pokreće na razmišljanje. U kojoj meri su ciljevi učenja postavljeni tako da se pojavi centralna ideja? Da li postoji ravnoteža između teksta i grafike koja daje potporu sadržaju poruke? Da li su grafički elementi međusobno povezani? U dimenziji pružanja u vremenu i prostoru, autori ističu „nastavak“ nakon upotrebe i/ili gledanja/doživljavanja plakata. Primer je gore navedeni QR kod iz koga možete dobiti dodatne informacije.

### Alati i pomoć za dizajniranje postera

Uvek je korisno podržati studente u dizajniranju adekvatnih plakata koji odgovaraju smernicama i kriterijumima dizajna. To često rezultira deljenjem „formata (formi)” za razvoj specifičnih vrsta plakata. Primeri takvih formata mogu se naći, na primer, U.C. Univerzitet Davis (<https://urc.ucdavis.edu/creating-effective-academic-posters>). Više smernica možete naći, na primer, na sledećem linku Univerziteta u Kentu (<https://www.kent.ac.uk/brand/visual/posters.html>). Razno-vrsne smernice za dizajn mogu se integrisati i u kontrolnu listu koja se koristi za reviziju zadataka vezanih za ovu temu.

Power	Design Elements	Description	Reason
Attractive    Cognitive	Aesthetics	Visual appeal of the poster including; artistic design, color pallet, layout, overall size, print quality, etc.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Encourages teachers to hang the poster</li> <li>- Contributes to overall classroom aesthetics</li> <li>- Attracts student attention</li> </ul>
	Curricular Connection	Explicit and intentional connections to the curriculum including; broad overarching themes, process skills or individual content chunks	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Positions poster within curriculum and fosters a “sciency” classroom environment</li> <li>- Encourages teachers to hang the poster and rotate with topics/units</li> <li>- Affords both direct and indirect linkages to topics currently being studied</li> </ul>
	Invitation to Inquiry	Uses cognitive learning theory to attract and engage learners in a minds-on way (e.g. title as question, visual analogy, or discrepant imagery)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Activates students’ attention and catalyzes cognitive processing; creates “need-to-know”</li> <li>- Provides a framework to guide students’ construction of knowledge</li> </ul>
	Message	Explicit learning objectives distilled to essential ideas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Creates purpose</li> <li>- Defines what the learner should be able to do, know or believe</li> <li>- Distinguishes germane from extraneous text and visual content</li> </ul>
	Text/Image ratio	Decrease volume of explanatory text and increase size of central imagery	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reduces the visual complexity and lowers the initial cognitive load</li> <li>- Increases approachability (less investment)</li> <li>- Central or iconic images are visible to more students</li> <li>- Complimentary visual, text, and pedagogical elements increase visual power and educational effectiveness</li> <li>- Fosters teacher/student/poster interactions</li> </ul>
Protractive	Extensions	Provide opportunities for students to extend understanding through elements outside the 2-D, static space of a poster	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Integrates poster into instructional process</li> <li>- Offloads related but extraneous information from the poster to the web</li> <li>- Extends time on task</li> <li>- Fosters interactions with supporting live or simulated phenomenon</li> </ul>

U manjoj meri su dostupna empirijska istraživanja koja sistematski mere efekat upotrebe postera na obrazovno postignuće.

Rosanti i Abu Seman (2019) postavili su eksperimentalni dizajn u visokom obrazovanju i uporedili grupu učenika koji su proučavali ciljeve učenja sa plakatima i bez njih. U ovoj maloj studiji studenti koji su u eksperimentu koristili poster bolje su se pokazali na testu obrade znanja.

Istraživanje Banerjee i Greene (2013) istraživalo je efekat dizajniranja plakata u kampanji protiv pušenja. Analiza sadržaja postera pokazuje da adolescenti imaju prilično dobru predstavu o uticaju pušenja, kao i koje su kampanje protiv pušenja efikasne.

Riejos i kolege (2001) zahtevali su od studenata da izrade plakate na engleskom jeziku, kako bi probali da metafore prenesu na razumljiv način. Ispostavilo se da su plakati imali značajan uticaj na bolje razumevanje metafora. Reilly (2007) takođe koristi plakate na časovima svog jezika prilagođeno ciljnoj grupi – engleski kao strani jezik. U njegovom istraživanju, plakati se uglavnom koriste kao nagoveštaji za reči, rečenice, ideje i situacije. Pored toga, plakati se koriste za promociju interakcije između učenika i nastavnika. Analiza podataka ukazuje na to da usmena komunikacija jača, da postoji i autentičnija komunikacija, da su učenici samopouzdaniji, da je manje jezičkih grešaka, da studenti mogu samostalno da rade, da postoji dobar uvid u usmene jezičke veštine učenika i tome slično.

Naravno, efekat postera ne može se odvojiti od integrisane upotrebe postera u širem okruženju za učenje i podučavanje. Nopr i Shahrill (2014) koristili su dizajn i upotrebu poster-prezentacije kao osnovu u matematici (oblast: geometrija trougla). Oni navode značajno veći efekat učenja kod učenika na testu. Međutim, ispostavilo se da su rezultati u eksperimentalnim uslovima bili znatno pozitivniji, nego što je to bilo u realnosti.

Zastupajmo sada drugačiji pristup i gledajmo snimak animacije napravljen pomoću aplikacije Doodly. Pomoću ovoga možete da razvijete animirane crteže, dodate tekst, slike i dodate glas. U sledećoj temi pozabavićemo se vrstama alata za promociju obrazovne interakcije i komunikacije. Osvrnimo se, sada, na osnovni problem u zajedničkom učenju: da ne postoji „saradnja“. Rešenje se odmah nameće: razvoj „skripata“ koja daju „strukturu“ grupnom radu i zajedničkom učenju. [https://www.youtube.com/watch?v=kvSPorYXs9A&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=kvSPorYXs9A&feature=emb_logo)

## Diskusija i kolaboracija u visokom obrazovanju

Diskusija i kolaboracija u visokom obrazovanju olakšavaju savladavanje sledećih ciljeva učenja:

- Objasniti da je pružanje „strukture“ od suštinske važnosti za uspešnu saradnju.
- Razviti skripta za sadržaj i/ili ulogu koja podržava saradnju u grupi.
- Skrenuti pažnju na to da se prilikom zajedničkog rada pruža i individualna i grupna odgovornost.

Postoji mnogo blogova, veb stranica i istraživačkih članaka koji izražavaju značaj grupnog rada. Međutim, primetno je da se, ne samo nastavnici, već i učenici, često negativno izražavaju o radu u grupi (pročitajte <https://educadvisor.mi/articles/vhi-everi-college-student-hates-group-assignments/>). Često se od učenika može čuti: „Ne volim grupni rad!“ Naredni članak bavi se rešavanjem problema zabrinutosti učenika oko učenja u malim grupama, InSight: Journal of Scholarli Teaching, 11, 81–89.

Da li zajedničko učenje ima pozitivan efekat na učenje?  
Šta je potrebno za zajedničko učenje?

I sa teorijske i sa istraživačke tačke gledišta, saradničko učenje ima veliki potencijal i značaj te ga možemo smatrati efikasnim načinom učenja. Da bi se taj potencijal uspešno iskoristio, moraju biti ispunjeni brojni uslovi.

Kratka uvodna aktivnost o mapi uma približava nas istraživanjima o kolaborativnom učenju. Šta kaže istraživanje? Hattie (2012) u svojoj knjizi sumira rezultate 50.000 studija koje ispituju šta „deluje” u obrazovanju. Njegova metaanaliza je jasna: zajedničko učenje očigledno ima veći efekat učenja od individualnog učenja. Ali odmah naglašava da to zaista znači da su ispunjeni kritični preduslovi.

Iz ovog i drugih istraživanja, saznajete da je neophodno imati jasan cilj na umu (šta da radimo?). Moraju se proceniti i svi učesnici pojedinačno i grupa u celini. Studenti imaju potrebu za strukturom prilikom rada u grupi. Potrebne su im povratne informacije o njihovom pristupu i radu u grupi. Pored povratnih informacija o konačnom proizvodu koji treba isporučiti, potrebno je i da grupa sama proceni svoj rad. Pogrešna pretpostavka jeste da studenti mogu da rade zajedno. Saradnja je teška kompetencija koju morate naučiti, studentima je zato potrebna podrška u procesu saradnje.

Ključna reč koja se u literaturi uvek iznova koristi za iniciranje zajedničkog učenja je struktura. U ovoj temi to radimo koristeći skripta. O tome ćemo detaljnije govoriti u sledećem odeljku.

### Dizajniranje zadataka za rad u grupi

U prvom primeru scenarija, posmatramo grupni rad u kontekstu zdravstvene obuke. U ovoj vrsti obuke studenti obavljaju puno prakse i dolaze u praktična okruženja gde se kontinuirano bave problemima. U ovom primeru, studentima se kontinuirano nude mrežni problemi tokom dužeg vremenskog perioda, pored njihovih praksi, koje se zasnivaju na dobro odabranom slučaju. Da bi sprečili studente da se sa tim problemima suočavaju previše rutinski i zaborave šta im je ponuđeno na njihovim kursevima u pogledu teorije, istraživanja, postupaka, etike, oni se usmeravaju na grupni rad. Nastavnik je razvio dve vrste skripata u ovom pristupu. U nekim slučajevima studenti rade na osnovu sadržajnih skripata. U drugim slučajevima, oni rade prema konkretnim ulogama koje se obično susreću u praksi.


Nastavnik određuje specifične uloge za svakog učenika: ulogu farmaceuta, ulogu nastavnika, ulogu istraživača, ulogu predstavnika farmaceutske kompanije. Kada se bavi nekim slučajem, svaki učenik odgovara iz svoje uloge. „Farmaceut” će morati da sledi tačnu ulogu kada, na primer, proverava lekarski recept. Uloga „nastavnika” znači da učenik kontinuirano proverava da li je ono što drugi pišu u skladu sa onim što je obrađeno na časovima. Stoga on/ona potkrepljuje predloge, pristupe, definicije, postupke, na osnovu konkretnih dokumenata iz teorijskih i/ili praktičnih lekcija. „Istraživač” traži na internetu dodatne informacije kako bi podstakao ili potkrepio grupni pristup. „Trgovački predstavnik” traži alternativne proizvode i/ili alate koji se mogu ponuditi/prodati u konkretnoj situaciji. Alternativni pristup ulogama zahteva da studenti preuzmu sledeće uloge: „moderator”, „istraživač izvora” (na kursevima i na internetu), „ispitivač” (ovaj student kontinuirano pita ostale članove grupe o tome šta predstavljaju) i „integrator” (koji kontinuirano objedinjuje sve do sada postignuto u sve veći sažetak).

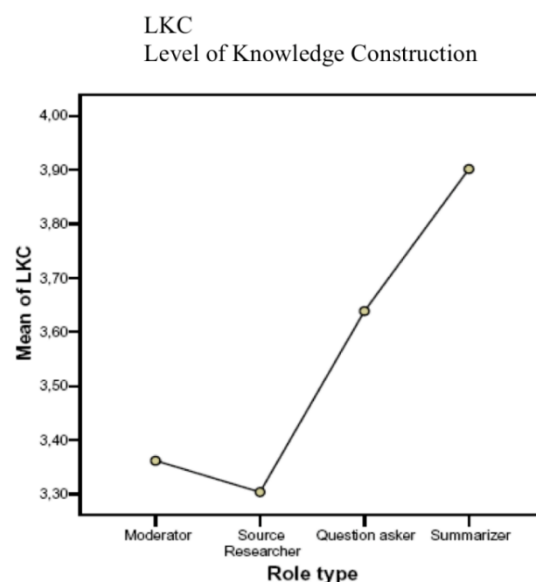
## Skripta sadržaja

Naglasak je na zadacima koji se rešavaju prilikom rešavanja problema: npr. definisanje problema, iznošenje hipoteza, predlaganje postupka za prikupljanje/merenje, prikupljanje podataka, sumiranje rezultata, diskusija i pisanje zaključaka.

U predstojećem primeru nalazi se situacija sa kojom se studenti hvataju u koštac. Sedamdesetogodišnjak, gospodin Suikerman, ulazi u apoteku sa receptom lekara. Čovek je pacijent sa dijabetesom. Obično će mu se davati injekcije, ali sada mu se daje recept za oralno primenjeni lek.



 1.1111.11.111		Naam en voornaam van de voorschrijver CASUS UGENT	
DOOR DE VOORSCHRIJVER IN TE VULLEN naam en voornaam van de rechtsbekende: SUIKER Man			
Voorbehouden aan het verpakkingstype		R/ Mixtard® 30 Penfill	
Stempel van de voorschrijver Dr. Casus UGent 1.1111.11.111 Farmaciestraat 1 9000 Gent Tel 09 000 00 00		Datum en handtekening van de voorschrijver  Uitgevoerd vanaf voornoemde datum of vanaf	



Istraživanja ovog pristupa grupnom radu pokazuju da studenti koji rade sa ulogama integrišu mnogo veći stepen znanja i interakcije u svojem daljem radu. Drugo, istraživanje takođe pokazuje da ne uče svi isto, u zavisnosti od uloge. U ovde proučenom slučaju vidite da je stepen razvoja znanja najniži kod učenika koji preuzima ulogu moderatora, dok student koji preuzima ulogu „ispitivača” i „integratora” očigledno uči mnogo više. Ovo je očigledno, jer poslednja dva veoma pažljivo prate ono što rade svi ostali članovi grupe. Na osnovu ovog rezultata istraživanja, daje se savet za „rotiranje” uloga između članova grupe.

Ovde smo razvili niz primera skriptata. U zavisnosti od zadatka u ovoj temi, ne radi se samo o generalnom opisu u skriptima, već treba napraviti „mapu skriptata“ za generalna skripta. Poenta je u tome da studenti „nauče” kako da pristupe problemu. Davanje jasnog postupka u zadatku trebalo bi da im pomogne u tome.

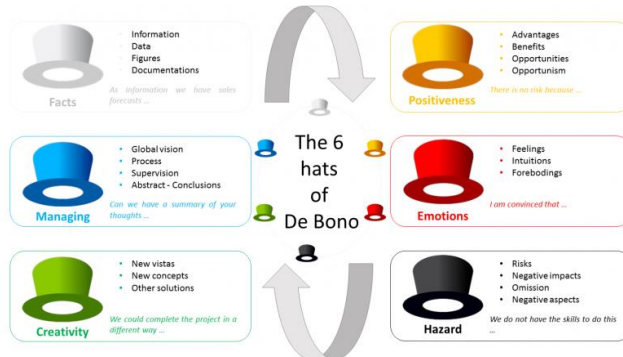
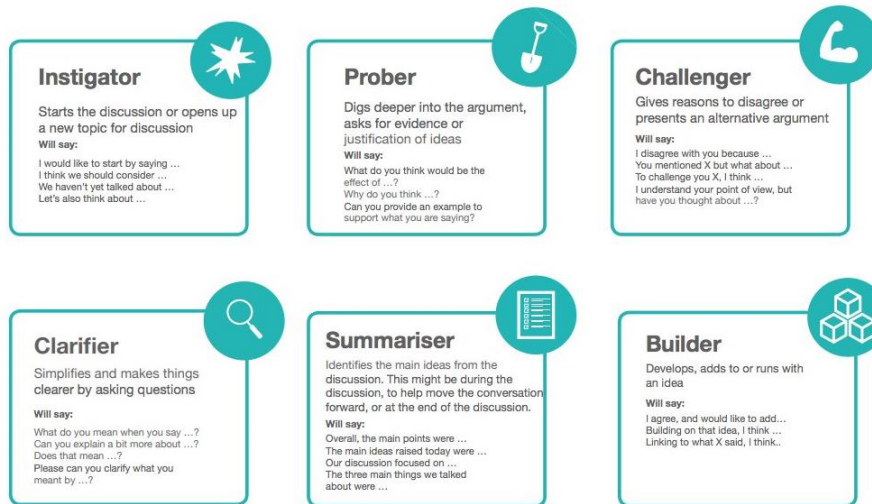
Kada se bira sadržaj skriptata treba razmisliti o koracima koje treba preduzeti u rešavanju problema/zadatka:

- Intervju: određivanje svrhe intervjuja, odabir osoba sa kojima će se razgovarati, razvijanje smerica za intervju, vođenje beleški tokom intervjuja, rezimiranje odgovora po intervjuu, razvijanje zaključaka za svaki intervju.
- Foto kolaž za analizu ekonomije jedne zemlje: definisanje ekonomskih sektora, određivanje osnovnih pojmova i procesa za koje se traže fotografije, traženje fotografija, razvijanje zajedničke niti za izložbu fotografija, određivanje teksta komentara za svaku fotografiju, razvoj teksta brošure za izložbu ...

- Video snimak (5 minuta) za predstavu: čitanje drame, odabir ključnih radnji za svaki čin iz predstave, pisanje kratkog scenarija, podela uloga u grupi, scenografija i kostimi, snimanje video klipa, montaža video klipa, izrada početnih i krajnjih kredita...
- Ekonomski problem: analiza tržišne potražnje, analiza proizvoda na tržištu, razvoj prototipa novog proizvoda, istraživanje tržišta prototipa.

## Skripta zasnovana na ulogama

Uloge u diskusiji pomažu studentima da se bolje snađu u govoru i da razviju veštine komunikacije – govora i slušanja.

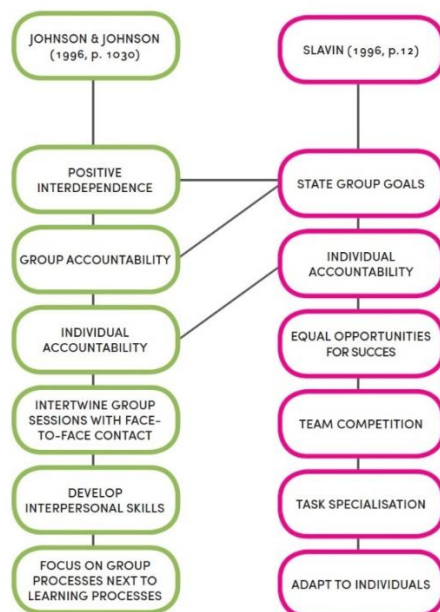


Primeri video klipova o „ulogama u grupnom radu” mogu se naći i u Klascement (npr. <https://www.klascement.net/downloadbaar-lesmaterialen/94290/rollengroepswork-kaartjes/> )

Kada se koriste skripta, važno je da je studentima struktura jasna i da su zbog toga skripta ispisana vrlo detaljno i korak po korak.

Istraživači Johnson & Johnson (1996) i Slavin (1996) ističu i sledeće karakteristike dizajna grupnog rada. Ovi istraživači su izvršili metaanalizu istraživanja o rezultatima uspeha zajedničkog učenja. Njihove publikacije i dalje se smatraju prekretnicom u istraživanju nastavnih metoda. Sledeća slika pokazuje kako istraživači dolaze do vrlo sličnih zaključaka.





Ovo bi bio naš izbor smernica:

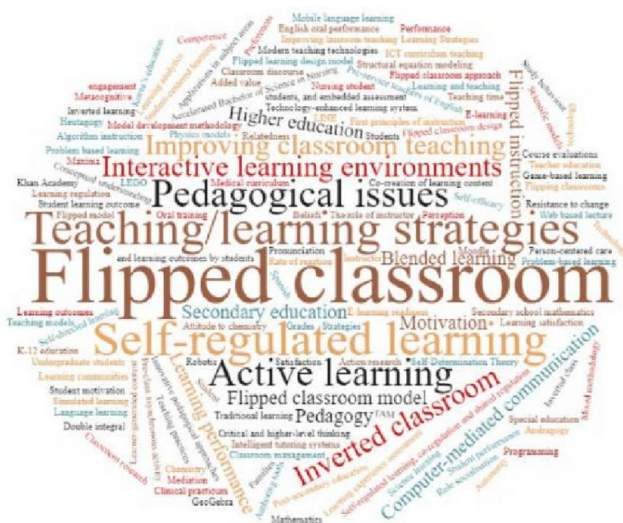
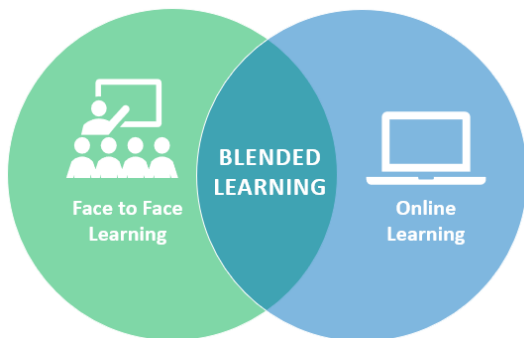
- Obezbediti vrlo jasan i operativan (uočljiv) cilj učenja, tako da učenici dobro znaju šta na kraju treba da pruže. Slavin ovo ističe kao „grupne ciljeve”.
- Pozitivna međuzavisnost znači da je saradnja korisna i da ona ne propada samo u distribuciji dela bez interakcije. To ne znači da studenti rade sve zajedno, ali uvek mora postojati faza u kojoj se pojedinačni rad sjedinjuje u slagalicu, dovodi do daljeg usavršavanja i da se pojedinačni rad takođe ocenjuje na osnovu kvaliteta.
- „Individualna” i „grupna odgovornost” znači da postoji objašnjenje ocene nastavnika koje naglašava šta se ocenjuje na osnovu pojedinačnog rada, a šta na osnovu stvarne saradnje.
- „Odgovornost” takođe znači da su studenti sami odgovorni za kvalitet svog rada. Zbog toga mnogi nastavnici nude i rubrike koju učenici samostalno i/ili u grupama koriste za procenu svog rada pre postizanja konačnog rezultata. Ako želite da vidite primere tipova rubrika, to možete učiniti ovde: <https://www.vernieuwenderwijs.nl/rubrics-klas-zo-ga-er-mee-aan-slag/>.
- „Razvijanje interpersonalnih veština” znači da uputstva takođe pomažu učenicima da razviju kompetenciju za zajednički rad. Na primer, obezbeđivanje skripata takođe dovodi do razvoja ovog aspekta kompetencije u saradnji.
- „Specijalizacija zadataka” direktno se odnosi na pružanje strukture kako je opisano u objašnjenju „skripata”.
- „Uvedite kontakt licem u lice”: Mnogo grupnog rada propada jer nastavnik nema uvid u stvarne aktivnosti. Kada kao nastavnik nemate redovan kontakt, ne dobijate mogućnost da postavljate pitanja ili dobijate objašnjenja i tada se ne pružaju privremene povratne informacije. To često dovodi do „neuspeha” ili manje uspešnog rada u grupi.
- Odredite jasno vreme. Ništa nije štetnije od zakazivanja sastanka za obavljanje grupnog rada „u roku od četiri nedelje”.

## Literatura

1. Allan, E. G. (2016). "I Hate Group Work!": Addressing Students' Concerns about Small-Group Learning. *InSight: A Journal of Scholarly Teaching*, 11, 81–89.
2. Anderson, D. R., & Davidson, M. C. (2019). Receptive versus interactive video screens: A role for the brain's default mode network in learning from media. *Computers in Human Behavior*, 99, 168–180.
3. Blackstock, D., Edel-Malizia, S., Bittner, K., & Smithwick, E. (2017, June). Investigating interactive video assessment tools for online and blended learning. In *International Conference on e-Learning* (pp. 31–39). Academic Conferences International Limited.
4. Boucher, M., Creech, A., & Dubé, F. (2019). Video feedback and the self-evaluation of college-level guitarists during individual practice. *Psychology of Music*, 0305735619842374.
5. Eriksson, P. E., & Eriksson, Y. (2019). Live-action Communication Design: A Technical How-To Video Case Study. *Technical Communication Quarterly*, 28(1), 69–91.
6. Gordon Neil, *Flexible Pedagogies: technology-enhanced learning*, University of Hull, January 2014.
7. Haagsman, M. E., Scager, K., Boonstra, J., & Koster, M. C. (2020). Pop-up questions within educational videos: Effects on students' learning. *Journal of Science Education and Technology*, 1–12.
8. Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 metaanalyses relating to achievement*. London: Routledge.
9. Hattie, J. (2015). The applicability of Visible Learning to higher education. *Scholarship of teaching and Learning in Psychology*, 1(1), 79.
10. Hattie, J., & Clarke, S. (2018). *Visible Learning: Feedback*. London: Routledge.
11. Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, 77(1), 81–112.
12. Mahoney, P., Macfarlane, S., & Ajjawi, R. (2019). A qualitative synthesis of video feedback in higher education. *Teaching in Higher Education*, 24(2), 157–179.
13. Masaki, M., Hechler, P., Gadbois, S., & Waddell, G. (2011). Piano performance assessment: video feedback and the Quality Assessment in Music Performance Inventory (QAMPI).
14. Moussiades, L., Kazanidis, I., & Iliopoulou, A. (2019). A framework for the development of educational video: An empirical approach. *Innovations in Education and Teaching International*, 56(2), 217–228.
15. Özkul, S., & Ortactepe, D. (2017). The use of video feedback in teaching process-approach EFL writing. *TESOL Journal*, 8(4), 862–877.
16. Pereira, J. A., Merí, A., Masdeu, C., Molina-Tomás, M. C., & Martínez-Carrió, A. (2020). Using videoclips to improve theoretical anatomy teaching. *European Journal of Anatomy*, 8(3), 143–146.
17. Preradovic, N. M., Lauc, T., & Panev, I. (2020). Investigating interactivity in instructional video tutorials for an undergraduate informatics course. *Issues in Educational Research*, 30(1), 203.
18. Schellens, T., Van Keer, H., & Valcke, M. (2005). The impact of role assignment on knowledge construction in asynchronous discussion groups: A multilevel analysis. *Small Group Research*, 36(6), 704–745.

19. Tang, T., Tang, J., Hong, J., Yu, L., Ren, P., & Wu, Y. (2020). Design guidelines for augmenting short-form videos using animated data visualizations. *Journal of Visualization*, 1–14.
20. Ten Hove, P., & van der Meij, H. (2015). Like it or not. What characterizes YouTube's more popular instructional videos?. *Technical communication*, 62(1), 48–62.
21. Timmers, S., Valcke, M., De Mil, K., & Baeyens, W. R. G. (2008). The impact of computer supported collaborative learning on internship outcomes of pharmacy students. *Interactive Learning Environments*, 16(2), 131–141.
22. Valcke, M. (2018). *Onderwijskunde als ontwerpwetenschap. Deel I*. Leuven/Gent: Acco.
23. Weinberger, A., Ertl, B., Fischer, F., & Mandl, H. (2005). Epistemic and social scripts in computer-supported collaborative learning. *Instructional Science*, 33(1), 1–30.
24. Zainuddin Z., Halili S. H.(2016). Flipped Classroom Research and Trends from Different Fields of Study, *International Review of Research in Open and Distributed Learning Volume 17*
25. The power of blended learning, July 2020, Professional innovation pathways, e-Workbook

**Autori:**  
**Sladana Dimitrijević**  
**Ana Kaplarević Mališić**



## **Mešovito učenje** sa posebnim osvrtom na *Obrnutu učionicu*

PITANJA:

Kako povećati aktivno učešće studenata u nastavi?

Kako dodatno motivisati studente za učenje?

Kako studente osposobiti za samostalno učenje?

Kako uticati na studente da preuzmu odgovornost za sopstveni rad i napredak?

Da li odgovor leži u kombinovanom modelu nastave i učenja?

Šta je *Mešovito učenje* i kako ga organizovati?

Šta je to *Obrnuta učionica* i kako je organizovati?

# Sadržaj

<u>Predgovor</u> .....	36
<u>Uvod</u> .....	37
<u>Šta je to mešovito učenje?</u> .....	38
<u>Ključni elementi mešovitog učenja</u> .....	39
<u>Dizajn mešovitog učenja</u> .....	43
<u>Dizajn univerzitetskih kurseva koji uključuju mešovito učenje</u> .....	45
<u>Obrnuta učionica</u> .....	53
<u>Dizajn Obrnute učionice</u> .....	56
<u>Alati obrnute učionice</u> .....	60
<u>Primeri primene Obrnute učionice</u> .....	64
<u>Literatura</u> .....	66

## Predgovor

Slobodno se može reći da su obrazovna teorija i praksa u stalnoj transformaciji, od nastanka prve škole do danas, kao i da je evidentno da je ta transformacija poslednjih decenija sve brža i samim tim zahtevnija. Ovo je pre svega uslovljeno brzim promenama životnih okolnosti čitavih društava, zapravo čitavog čovečanstva, koje nameću nove ciljeve i ishode obrazovanja. Dodatno, dramatične okolnosti pandemije COVID 19 pokazale su koliko je bitna fleksibilnost jednog od vitalnih sistema svakog društva, sistema koji sudbinski određuje budućnost tog društva – sistema obrazovanja. Sve ovo je dodatno motivisalo, ali i primoralo, nastavnike širom sveta da integrišu tehnologiju u svoje poučavanje bez obzira na to koliko su bili voljni da takav zaokret učine ili koliko su bili spremni za implementaciju novih strategija.

Ova kratka skripta nastala su kao deo rada na ERASMUS+ projektu TeComp, koji je upravo posvećen unapređenju nastavničkih kompetencija zaposlenih u visokom obrazovanju, a jedan od motiva da tema skripata bude baš *Mešovito učenje* (eng. *Blended learning*) i *Obrnuta učionica* (eng. *Flipped classroom*) leži i u iznenadnim okolnostima koje su nas zadesile tokom realizacije projekta. Nešto što smo zamišljali kao proces koji će trajati nekoliko godina – uvođenje onlajn elemenata nastave u redovni rad, odjednom je postala naša svakodnevica. Zato smatramo da iz tog iskustva sa onlajn nastavom sada kvalitetnije možemo osmisliti i pripremiti nastavu koja integriše savremene tehnologije u redovnim okolnostima. Cilj ovog materijala jeste da na kratak i informativan način prikaže *Mešovito učenje*, s posebnim osvrtom na jedan njegov vid *Obrnutu učionicu*. Preporučeni modeli predstavljaju ilustraciju teorijskog okvira i zamišljeni su kao osnov za rad i diskusiju na radionicama koje će u okviru projekta biti realizovane. Očekuje se da ta diskusija rezultira konkretnim primerima koji su prilagođeni potrebama učesnika radionice, odnosno njihovim studentima. Nadamo se da će materijal biti koristan kao pomoćprilikom planiranja nastave, a posebno bismo bili zadovoljni ukoliko čitaoca podstakne na kritički osvrt na korišćenje različitih strategija i modela u nastavi i rezultira stručnim ili naučnim radovima na ovu temu.

## Uvod

Najšire postavljeno, obrazovanje u celini jeste usmerena i organizovana delatnost koja ima za cilj da polaznici (učenici/studenti) steknu odgovarajuće kompetencije, tj. da osposobi polaznika za samostalni život u kome će ostvariti svoje potencijale i biti koristan član zajednice kojoj pripada. Svako obrazovanje i učenje ima tri aspekta, polaznici usvajaju znanje, stiču veštine i formiraju stavove, tj. stiču kompetencije. Iako je obrazovanje civilizacijska konstanta, sam njegov oblik i kompetencije kojima rezultira menjale su se vremenom, što je bilo uslovljeno promenom životnih, prirodnih i društvenih okolnosti.

Jedno od dominantnih obeležja savremenog doba jeste sveprisutni upliv tehnologije u naše živote (i na nivou pojedinca i na nivou čitavog društva), kao i eksponencijalni rast dostupnih informacija. To upravo i uslovljava promenu nastave i nastavnih metoda, kako bi obrazovanje rezultiralo onim što najkraće nazivamo ključnim kompetencijama čoveka 21. veka. Pod kompetencijama podrazumevamo multifunkcionalne sklopove znanja, veština i stavova koji su pojedincu potrebni za njegovu ličnu realizaciju i razvoj. Kao ključne kompetencije nameću se:

- komunikacija na maternjem jeziku,
- komunikacija na stranom jeziku,
- matematička pismenost,
- naučno-tehnološka pismenost,
- rešavanje problema,
- informatička pismenost,
- „naučiti se učenju”,
- zdravstvena pismenost,
- „preduzetništvo”,
- socijalna kompetencija (saradnja i timski rad),
- građanska kompetencija,
- kulturna svest, estetska kompetencija,
- ekološka kompetencija.

Uočavamo da više pobrojanih kompetencija nisu vezane isključivo za jedan nastavni predmet, već je potrebno razvijati ih u što širem skupu predmeta. Takve su, na primer, kompetencija za rešavanje problema, kompetencija „naučiti se učenju” i socijalna kompetencija. Postavlja se pitanje kako to možemo postići. Jedan od odgovora, koje nameće savremena pedagoška i didaktička teorija, jeste korišćenje strategija u podučavanju koje će potpomoći aktivno učenje, koje će studenta<sup>1</sup> postaviti kao glavnog aktera procesa i nosioca aktivnosti, dok će nastavnik imati više ulogu organizatora i koordinatora procesa učenja. Ujedno preporučuje se podučavanje koje odgovara savremenom trenutku, okruženju u kome studenti danas žive i njihovim navikama, tj. preporučuje se svrsishodno i adekvatno uključivanje tehnologija u obrazovanje. Zapravo, traži se način da se maksimalno iskoriste dobre strane tradicionalne

---

<sup>1</sup> Skripta su namenjena nastavnicima i saradnicima u visokom obrazovanju i stoga se uglavnom koristiti termin studenti. Međutim, treba imati u vidu da je dobar deo materijala opšte prirode, tj. može se adekvatno primeniti na sve nivoe obrazovanja, pa i na nastavu u douniverzitetkom obrazovanju.

nastave licem u lice u kombinaciji sa novim mogućnostima pružanja informacija i saradnje uz pomoć savremenih tehnologija, tj. da se napravi sinergija između klasične i onlajn nastave. U najkraćem to je ideja na kojoj je nastao novi model obrazovanja, nova strategija podučavanja i učenja, takozvano mešovito učenje (eng. *blended learning*).

## Šta je to mešovito učenje?

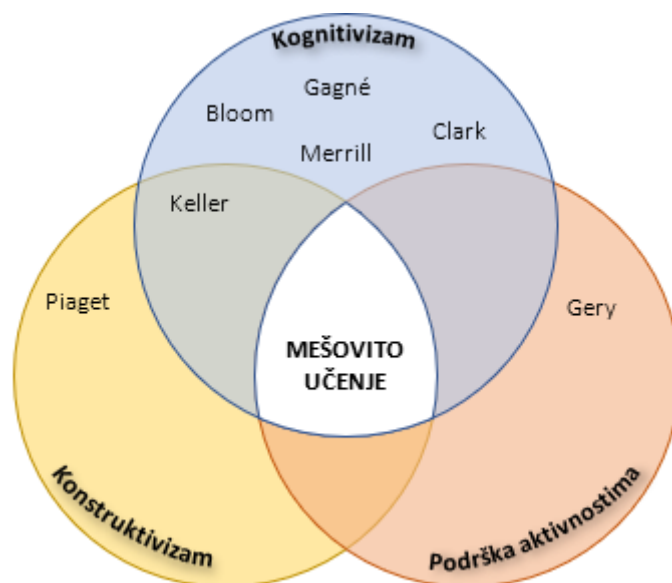
Bitno je istaći da nastanak *mešovitog učenja* prethodi pojavi digitalne tehnologije iako se danas s njom blisko povezuje. Njegova genealogija leži u učenju na daljinu putem dopisnih kurseva. Na primer, u Kanadi su deca čuvara svetionika obrazovana na taj način još 1919. godine (Barbour, 2014). Cilj premošćavanja prostorne udaljenosti i danas ostaje jedan od bitnih motiva za korišćenje mešovitog učenja. Dodatni podstrek za razvoj ovog tipa nastave desio se krajem prošlog veka, kada je dostupnost personalnih računara i pojava interneta i društvenih mreža omogućila razvoj novih modela nastave i učenja na različitim nivoima obrazovanja. Nova tehnologija imala je potencijal ne samo da premosti prostor, već i da premosti vreme (putem snimanja) i da individualizuje učenje (studenti imaju kontrolu u izboru puta kroz gradivo i tempa učenja). Sve to uticalo je da različiti nastavnici, različitih oblasti i različitih pedagoških filozofija, uključe novu tehnologiju u svoju nastavnu praksu iz različitih razloga, i da stoga imaju različito poimanje o tome šta *mešovito učenje* znači.

Prilično je očigledno poreklo naziva *mešovito učenje*. Naime, ovaj pristup uključuje mešanje (kombinovanje):

- aktivnosti učenja licem u lice sa onlajn aktivnostima i formatima,
- tradicionalnog rasporeda nastave sa drugim vidovima, kao što su rad vikendima, intenzivni rad, dodatni rad,
- ustaljenih tehnologija, kao što je hvatanje beleški, sa društvenim mrežama i savremenim tehnologijama,
- simulacije, grupne aktivnosti, učenja putem sajta, praktične vežbe.

Najšire shvaćeno, a verovatno najdublje i najkorisnije, jeste tumačenje da *mešovito učenje* treba da uključi kombinovanje različitih obrazovnih teorija u nastavnoj praksi na način koji će najbolje odgovarati datoj situaciji. Treba imati u vidu da teorije učenja nisu poput religije, jedna ne isključuje drugu, već je cilj je da imamo pravu teoriju za pravu situaciju (Zemke, 2002). Izbor u konkretnom slučaju zavisi od karakteristika studenata, nastavne oblasti i konkretnih nastavnih sadržaja, prirode znanja i veština koje studenti treba da savladaju i konteksta u kojem treba da ih primenjuju.

Usled svega navedenog, očigledno je da ne postoji opšte prihvaćena i potpuna definicija pojma mešovito učenje. Danas se ovaj pojam pre svega koristi u značenju integracije učenja u realnoj učionici, licem u lice, sa onlajn ili e-učenjem.



Slika 1. Mešovito učenje kao spoj više teorija učenja

*Mešovito učenje* je model nastave koja se oslanja na strategije i sistematski pristup u kombinovanju vremena i vidova učenja, tako da se integrišu najbolji aspekti klasične nastave licem u lice, tj. nastave u realnoj učionici, i onlajn interaktivne nastave, uz korišćenje odgovarajućih informaciono-komunikacionih tehnologija.

Predviđa se da će se budući sistemi učenja razlikovati ne na osnovu toga da li kombinuju različite strategije, već na osnovu toga kako ih kombinuju. Ovo pitanje kako, tj. pitanje dizajna, svakako je jedno od najvažnijih. Kao i svaki problem sa dizajnom, ovaj izazov u velikoj meri zavisi od konteksta i ima praktično beskonačan broj mogućih rešenja.

Novе tehnologije (IKT) mogu biti moćni pedagoški alati, ne samo bogati izvori informacija, već i proširenje ljudskih mogućnosti i konteksti za socijalne interakcije koje podržavaju učenje. Međutim, proces upotrebe tehnologije za poboljšanje učenja nikada nije i ne sme biti samo tehnička stvar. Ono što svakako treba izbeći jeste uvođenje novih tehnologija bez jasnog didaktičkog razloga i cilja. Samo uključivanje IKT ne znači nužno unapređenje nastavnog procesa. Mnogi autori se već bave empirijskim istraživanjima koji mere efekte uvođenja tehnologije u obrazovanje i rezultati nisu jednoobrazni. Kao i kod drugih tipova inovacija, one donose uspeh samo kada su teorijski utemeljene i dobro osmišljene, u suprotnom nema pomaka napred, čak može biti i negativnih efekata.

## Ključni elementi mešovitog učenja

Pet ključnih elementa mešovitog učenja jesu:

- 1) **dogadjaji uživo**, to su sinhroni dogadjaji učenja kojima rukovodi nastavnik, pri čemu svi studenti učestvuju istovremeno, u realnoj ili virtualnoj učionici;
- 2) **samostalno učenje**, tj. učenje u kome je student samostalan, uči sopstvenim tempom u vremenu kada to njemu najviše odgovara;
- 3) **saradnja**, studenti međusobno komuniciraju u odgovarajućem formatu i okruženju, npr. e-mailom, u okviru foruma ili na društvenim mrežama,



- 4) **ocenjivanje/evaluacija**, procene znanja studenata, mogu i da prethode događajima uživo i samostalnom učenju i tada imaju za cilj utvrđivanje prethodnog znanja na koje se novo oslanja, a obavezne su naknadne provera znanja kako bi se ustanovio postignuti nivo znanja i izmerio ostvareni transfer znanja;
- 5) **materijali za podršku učenju**, koji mogu biti raznovrsni, štampani, elektronski, linearni, nelinearni, interaktivni ili ne.



Slika 2. Ključni elementi mešovitog učenja

**Sinhroni događaji uživo** jesu centralni činilac mešovitog učenja. Za mnoge studente ništa ne može zameniti predavanja uživo stručnog nastavnika, tj. ništa ne može imati tako podsticajan efekat na njihovo učenje. Kako se postiže efikasan događaj uživo? Ne postoji jednostavan i jedinstven odgovor na ovo pitanje. Teoretičar John Keller (Carman, 2005), odgovor daje svojim ARCS (Attention, Relevance, Confidence, Satisfaction) modelom motivacije sa četiri elementa: pažnja, relevantnost, samopouzdanje i zadovoljstvo. Svaki element ovog modela može se koristiti za stvaranje zanimljivog i efikasnog iskustva učenja uživo.

- 1) *Pažnja*. Prvi aspekt ARCS modela je sticanje i zadržavanje pažnje studenata. Na primer, iskusni nastavnik u realnoj ili virtuelnoj učionici može započeti čas anegdotom, zanimljivim istorijskim događajem koji je povezan sa materijom koja će se izlagati, ili započeti postavljanjem pitanja koja podstiču studente na razmišljanje o željenoj temi i učešće u sinhronoj diskusiji u realnoj učionici ili na mreži, što studente motiviše za učenje.
- 2) *Relevantnost*. Studenti ostaju fokusirani kada smatraju da je materija koju uče relevantna za njihovu specifičnu situaciju. Da bi pokazao relevantnost, nastavnik može da koristi primere ili analogije poznate studentima. Treba barem ukazati, a još bolje pokazati kako studenti mogu da koriste informacije sa kursa za rešavanje realnih problema iz prakse.
- 3) *Poverenje*. Studenti moraju imati poverenja u svoje veštine i sposobnosti kako bi ostali motivisani, cilj/ishod im mora biti dostižan. Nastavnik treba jasno da ukaže šta se od studenata očekuju, šta su željeni ishodi, a zatim da ostavi dovoljno vremena da oni to i ostvare, da nauče planirano i uvežbaju svoje nove veštine. Kao što je Đerđ Polja, poznati matematičar i metodičar matematike, ukazivao, učenik neće zavoleti matematiku ako nije osetio zadovoljstvo „pobede” nad postavljenim problemom. Samopouzdanje se stiče iz doživljenog uspeha.
- 4) *Zadovoljstvo*. Kako bi studenti ostali motivisani, bitno je budu zadovoljni sveukupnim iskustvom učenja. Jedan od načina da se to postigne jeste pružanje različitih mogućnosti za učenje, ali i stvaranje uslova za uspešnu primenu naučenog.

**Asinhroni događaji samostalnog učenja** daju značajnu dodatnu vrednost modelu mešovitog učenja. Da bi se postigli maksimalni efekti samostalnog učenja, ono mora biti dobro pripremljeno i organizovano. Ne može se samo nastavni sadržaj izdeliti na sinhrono i asinhrono aktivnosti i očekivati da takva nastava ima smisla. Savremena teorija dizajna nastave podržava upotrebu multimedije kao alata za promociju prenosa znanja. Pri tome, tri principa zaslužuju posebnu pažnju (Ruth Clark, 2002).

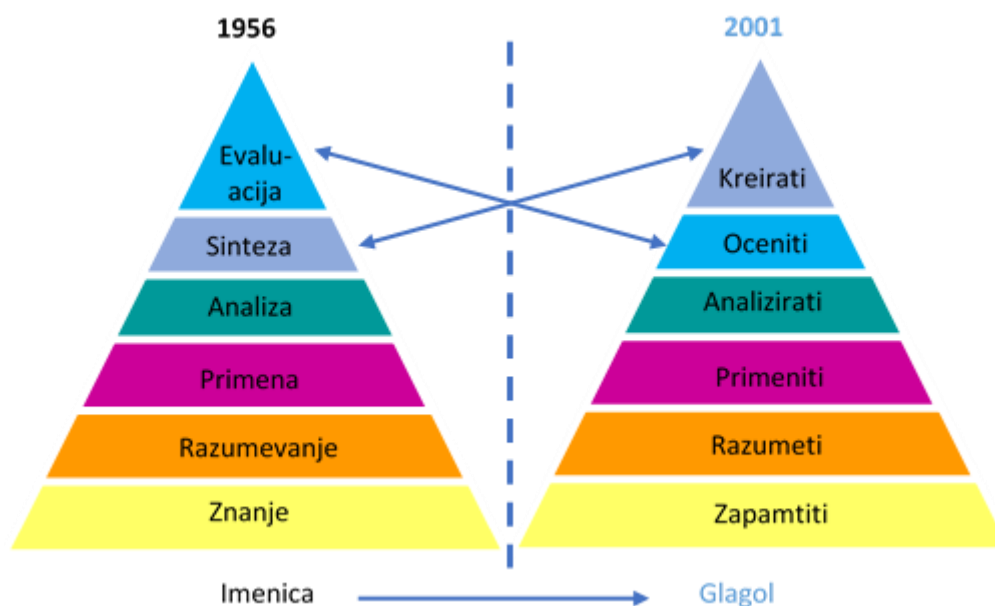
- 1) *Multimedijalni princip – dodavanje: grafik u tekstu može poboljšati učenje.* Istraživanja su pokazala da grafički prikazi mogu poboljšati učenje. Pritom je ključno da se osigura da se grafički prikazi direktno odnose na informacije iz teksta, da nose odgovarajuću poruku ili uputstvo, tj. da obrazuju, a ne ukrašavaju.
- 2) *Princip susednosti – postavljanje: tekst neposredno pored grafičkih prikaza poboljšava učenje.* Više studija (Clark, 2002) potvrdilo je da je učenje iz materijala koji su integrisali reči u blizini vizuelnih elemenata rezultiralo značajnim poboljšanjem učenja.
- 3) *Princip modaliteta – objašnjavanje: grafički prikaz sa zvučnim pojašnjenjem poboljšava učenje.* Zvučna objašnjenja posebno treba koristiti u situacijama kada je verovatno da će studenti imati poteškoća sa usvajanjem materije, bilo zbog velikog obima informacija ili složenosti materije. Na primer, ako studenti gledaju video, recimo demonstraciju rada softvera u nekoliko koraka, pažnja studenta fokusirana je na animaciju, pa će ih opterećivati da čitaju tekst sa ekrana, tada je bolje da video prati zvučno objašnjenje. Slično, izvođenje dugog i/ili kompleksnog dokaza neke teoreme bolje je zvučno ispratiti i tako naglasiti ideju i tok dokaza, kao i najbitnije korake.

**Smislena saradnja** uvećava snagu događaja uživo ili iskustva samostalnog učenja. Kako konstruktivistička teorija učenja objašnjava, ljudi kao društvena bića razvijaju nova razumevanja i znanja kroz svoje socijalne interakcije sa zajednicom, tj. drugim ljudima. Saradničko (kolaborativno i kooperativno) učenje studentima pruža dodatne mogućnosti koje nisu dostupne kod tradicionalnog podučavanja, jer grupa može postići smislenu učenje i rešiti probleme bolje nego što to može bilo koji pojedinac sam (Tinzmann & al.1990). Nastavnik pri organizovanju mešovitoog učenja obavezno treba da stvori okruženje u kojem će on i studenti moći da sarađuju sinhrono (grupe u realnoj učionici, čet sobe u virtuelnoj učionici i slično) i asinhrono (e-pošta, diskusije na forumima i slično). Razlikujemo dve vrste saradnje: student – student i student – nastavnik. Saradnja na relaciji student – student omogućava studentima da međusobno razgovaraju o kritičnim pitanjima, a ponekad i da tako nauče deo materije. Saradnja na relaciji student – nastavnik omogućava nastavnicima da podučavaju pojedinačno, individualizuju nastavu prema potrebama svakog pojedinačnog studenta, a studentima da dobiju dodatnu personalizovanu podršku učenju, koja može sadržati i dodatne smernice u obliku saveta, podsetnika i predloženih vežbi.

**Ocenjivanje/procenjivanje** jedan je od najkritičnijih sastojaka mešanog učenja iz dva razloga:

- 1) omogućava učenicima da „isprobaju” sadržaj koji već znaju, i tako prilagode sopstvenim potrebama mešovito učenje, i
- 2) meri efikasnost i svih drugih modaliteta učenja.

Bloom je 1956. dao jedan od najčešće korišćenih okvira za dizajniranje i davanje procena, koji je kasnije doživeo i nekoliko modifikacija (vidi sliku 3), ali i danas važi za opšte prihvaćen sistem koji se uzima za osnov pri formulisanju ishoda učenja ili pri proceni postignuća studenata.



Slika 3. Modifikacija Blumove taksonomije

Najčešće se identifikuje šest nivoa kognitivnog učenja: znanje, razumevanje, primena, analiza, sinteza i evaluacija (vidi Tabelu 1).

Nivo	Opis	Aktivnosti studenata
1. Znanje	Prisećanje i poznavanje prethodno učenih sadržaja.	Prepoznavaj, imenuj, navedi, pokaži, citiraj, ponovi, pronađi, nabroj, izaberi, nauči napamet
2. Razumevanje	Razumevanje sadržaja, što se obično demonstrira objašnjavanjem naučeno sopstvenim rečima i ilustrovanje na primerima.	Objasni, razlikuj, organizuj, demonstriraj, zaključni, predvidi, poveži
3. Primena	Korišćenje naučenog (pravila, principi, formule, teorije, koncepti, procedure) u novom kontekstu, kako bi se rešio postavljeni problem ili odgovorilo na pitanja ili neki drugi zahtev.	Primeni, reši, prilagodi, uradi na drugi način, proširi, upotrebi, prepoznavaj na primeru, navedi novi primer, grupiši
4. Analiza	Rastavljanje celine na manje delove uz objašnjenje veza između tih delova.	Napravi tabelu, graf, strukturni model, razgraniči, podeli, uporedi i izaberi
5. Sinteza	Sastavljanje delova u novu celinu, kreiranje nove strukture.	Kreiraj, napravi, obrazloži i prestavi, sažmi, napravi plan, izmeni, uredi, kombinuj
6. Evaluacija	Primenjivanje različitih kriterijuma kako bi se procenile ideje i izneli argumentovani zaključci i stavovi.	Proceni, odluči, iznesi svoje mišljenje, meri, rangiraj, predloži, zaključni

Tabela 1. Blumova taksonomija – klasifikacija nivoa učenja

**Materijali za podršku učenju** jesu, verovatno, najvažniji element mešanog učenja. Možemo razlikovati: štampane materijale ili materijale za štampu, pomoćne materijale i sredstva, i multimedijalne materijale. Štampani materijali su tradicionalan izbor i nezaobilazan deo svakog učenja, a već dugo se koriste i elektronski materijali pripremljeni za štampu, ali koji se ne moraju nužno štampati. Pomoćni materijali mogu biti siže, kontrolne liste na kojima se evidentira napredak ili grafikoni na kojima se beleže dobijeni rezultati i slično, a imaju cilj da potpomognu procesu učenja. Uplivom

tehnologije u obrazovanju, stvorio se dodatni prostor za multimedijalne nastavne materijale, koji su sa sve većom dostupnošću i popularnošću ličnih digitalnih asistenata (mobilni android telefon, tablet, laptop) učinili da studenti u svakom trenutku i na svakom mestu mogu imati pravovremenu podršku učenju.

## Dizajn mešovitog učenja

Bez obzira na model nastave, ona je uvek organizovan proces, i bez dobre pripreme dobri ishodi su malo verovatni. Pri planiranju nastave putem mešovitog učenja posebno treba uzeti u obzir sledeće stavke.

- 1) **Uloga fizičkog prostora.** Koristite interakciju licem u lice kada aktivnosti najbolje odgovaraju upotrebi fizičkog prostora, učionica, laboratorija, računarskih sala. Imajte u vidu da neki od ovih prostora imaju zajednička sredstva za učenje u kojima studenti mogu raditi i učiti zajedno (kolaborativno i kooperativno učenje).
- 2) **Planiranje i kreiranje nastavnih materijala.** Pored materijala koji ste sami kreirali, razmotrite i otvorene obrazovne resurse i resurse dostupne studentima u različitim bibliotekama.
- 3) **Korišćenje mrežnog prostora.** Koristite prostore i servise za saradnju i komunikaciju, dostupne na fakultetskom ili univerzitetskom nivou, kao i opšte otvorene servise. Trebalo bi oformiti forume za diskusiju, blogove za razmenu informacija, zajedničke, deljene beležnice, viki strane, itd.
- 4) **Pružanje povratnih informacija.** Povratne informacije moraju biti blagovremene, jasne i sažete.
- 5) **Fleksibilnost nasuprot strukturi.** Često kada dodate fleksibilnost, možete izgubiti određenu količinu strukture. Zato postavljanje rokova, jasnih ciljeva učenja i očekivanja od studenata igra važnu ulogu u mešovitom učenju.
- 6) **Učešće na času naspram pohađanja nastave.** Studenti moraju razumeti šta se od njih očekuje, kao i šta su obavezni zahtevi za uspešno završavanje nastave. Treba im jasno dati do znanja da je učešće važno i neophodno.
- 7) **Radno vreme.** Radno vreme nije ograničeno samo na časove, pružite studentima dodatnu pomoć ili priliku da postavljaju pitanja. U tu svrhu razmislite o korišćenju asinhronih i/ili sinhronih sesija.

Mešovito učenje kombinuje tradicionalne instrukcije licem u lice sa onlajn učenjem na mreži, tako da studenti imaju koristi od znanja i smernica nastavnika, ali i mogućnost samostalnog organizovanja učenja koje uključuje upotrebu različitih obrazovnih platformi ili aplikacija koje potpomažu učenje. Međutim, ne postoji jedinstvena kombinacija svih ovih elemenata, efikasno mešovito učenje zavisi od mnogo faktora (nastavni sadržaj, kontekst učenja, nastavni resursi, predznanje studenata i mnogi drugi). Zapravo, možemo reći da je mešovito učenje koncept, krovni pojam, koji sadrži nekoliko drugih podmodela. Navešćemo i ukratko objasniti neke tipične vidove mešovitog učenja.

- 1) **Okrenuta učionica** (eng. *flipped classroom*). Okrenuta (obrnuta, izvrnuta) učionica jeste metodologija, pristup učenju u kojem se tehnologija koristi da bi se preokrenula (izmenila) tradicionalna uloga učionice. Ako se u prošlosti vreme u učionici trošilo na predavanja studentima, sada u obrnutom modelu, učionica se koristi za podsticanje individualizovanog učenja i pružanje individualne pomoći studentima, a takođe i za poboljšanje interakcije između studenata, kao i između studenata i nastavnika. Iako je nastavni sadržaj još deo časa, taj sadržaj

uglavnom je dizajniran na takav način da bude dostupan i izvan učionice, van časova, što je odličan način da studenti uče sopstvenim tempom.

- 2) **Rotacioni model.** Kod ovog modela studenti se u fiksiranim vremenskim intervalima rotiraju na različitim aktivnostima, od kojih najmanje jedna uključuje učenje na mreži, a ostale mogu biti rad u malim grupama ili frontalni rad, grupni projekti, individualno podučavanje, izrada domaćih zadataka i vežbanje. U nekim slučajevima čitava grupa naizmenično menja aktivnosti, dok se u drugim slučajevima vrše rotacije malih grupa studenata. U svakom slučaju svi studenti prolaze sve aktivnosti. Rotacija može podrazumevati i rotaciju rada u klasičnoj i virtualnoj učionici po fiksiranom rasporedu.
- 3) **Fleksibilni model.** U ovom modelu, onlajn učenje čini okosnicu učenja, ali je povremeno student usmeren i na aktivnosti u realnoj učionici, pri čemu raspored nije precizno određen. Studenti su u mogućnosti da se fleksibilno kreću kroz različite modalitete učenja sa ciljem da optimizuju svoje iskustvo učenja na osnovu svojih specifičnih potreba. Svaki student u osnovi ima prilagođeni, fluidni raspored modaliteta učenja. Nastavnik pruža podršku studentima licem u lice na fleksibilnoj i prilagodljivoj bazi kroz aktivnosti kao što su podučavanje u malim grupama, grupni projekti i individualno podučavanje. U nekim slučajevima postoji značajna podrška licem u lice, a u drugim je ona minimalna.
- 4) **Učenje zasnovano na projektu.** U osnovi ovog modela jeste rad na konkretnom projektu a učenje je organizovano prema potrebama koje diktira izrada projekta. Student kreira upit, a zatim koristi mrežne resurse za prikupljanje informacija. Nastavnik je dostupan za podršku studentima u svim fazama projekta, a posebno pri izradi plana aktivnosti. Ovo je jedan od načina da se predavanja intenzivnije povežu sa stvarnim životom i prikaže primena teorije na realnim problemima.

Kao i svaki drugi pristup podučavanju i učenju, i mešovito učenje ima svoje prednosti i mane. Imajmo na umu da kombinacija samostalnog učenja i nastave licem u lice može biti korisna, ali samo kada se adekvatno primenjuje. Postoje i rizici jer nisu svi studenti spremni da budu samostalni kada je učenje u pitanju. Na neke od njih ovaj vid učenja deluje motivaciono, dok se drugi zbog njega osećaju zbunjeno. Očigledno je da mešovito učenje može biti dostupnije i fleksibilnije za studente, da može povećati nivo aktivnog učenja na času, a što se tiče nastavnika, mešovito učenje može unaprediti podučavanje i organizaciju nastave. Verujemo da su prednosti ovog modela značajnije od njegovih nedostataka, kao i da se u svakom konkretnom slučaju nedostaci mogu minimizirati. Ključno za uspeh jeste da nastavnici budno prate svoje studente i pružaju im snažnu podršku.

Kao **najznačajne prednosti** korišćenja mešovitog učenja izdvajamo sledeće:

- 1) **Individualizovana podrška studentima.** Kao što smo već pomenuli, najjača strana mešovitog učenja je prilika da se svakom studentu pruži personalizovana nastava koja odgovara njihovim potrebama.
- 2) **Studenti imaju pristup korisnim elektronskim materijalima bilo gde i bilo kada.** Savremeni tehnološki personalni uređaji omogućavaju studentima da budu dostupni za učenje u skoro svakom trenutku i na svakom mestu.

- 3) **Studenti mogu imati sve pogodnosti učenja na daljinu, tj. korišćenja digitalnih materijala.** To može uključivati korišćenje različitih izvora znanja, od dostupnih naučnih biblioteka do baza eseja u bilo kom trenutku kada im zatrebaju.
- 4) **Mešovito učenje podrazumeva više interakcije i saradnje studenata tokom učenja.** Studenti imaju priliku da komuniciraju sa nastavnicima i međusobno u realnoj ili virtualnoj učionici (koristeći video konferencije i druge načine komunikacije). Ovo doprinosi boljoj saradnji između nastavnika i studenata, kao i između samih studenata.
- 5) **Studentima obezbeđuje znatno više vremena za učenje.** Mešovitim učenjem je učenje organizovano u dužem vremenskom periodu i proteže se i posle završetka časa.
- 6) **Neki nastavnici tvrde da im je ovaj metod pokazao kako da budu „bolji predavači“.** Neki univerzitetski nastavnici tvrde da ih je primena mešovitog učenja motivisala da kreiraju bolje lekcije, da više razmišljaju o iskustvima studenata, prave individualne planove za studente i pomažu im u učenju.

Kao **najčešće otežavajuće okolnosti** korišćenja mešovitog učenja izdvajamo sledeće.

- 1) **Tehnologija može predstavljati veći izazov, nego pomoć.** Jedan od ključnih problema može biti tehnološka pismenost, koja može i u današnje vreme bitno varirati od pojedinca do pojedinca. Ona podjednako može biti problem i nastavnicima i studentima, jer nisu svi digitalni izvori pouzdani ni jednostavni za upotrebu. Takođe, dostupni digitalni resursi (uređaji, softveri i internet) mogu značajno varirati od pojedinca do pojedinca.
- 2) **Mešovito učenje nameće dodatne obaveze nastavnicima.** Mnogo je dodatnog posla za nastavnike u svim etapama mešovitog učenja. Nastavnici moraju da prošire svoje vidike, odaberu najprikladniji nastavni plan i ulože znatno više vremena i truda kako bi pronašli pravi balans između onlajn učenja i klasične nastave licem u lice. Potrebna je i prilična motivacija za iskorak iz već usvojenog stila predavanja.
- 3) **Studenti, takođe, mogu biti više opterećeni.** Uz širok spektar mogućnosti koje pruža mešoviti model učenja, on obično sa sobom nosi i veći broj različitih obrazovnih aktivnosti za studente.
- 4) **Kredibilitet izvora znanja i plagijarizam postaju sve veći problem.** Posedovanje digitalnog obrazovnog okruženja može prouzrokovati više plagiranja, nego inače, iz različitih mrežnih izvora. Štaviše, postoji niz nepouzdanih izvora informacija koji prikazuju lažne ili pogrešno protumačene činjenice.

## Dizajn univerzitetskih kurseva koji uključuju mešovito učenje

Istraživanje sopstvene nastavne prakse trebalo bi da bude sastavni deo rada svakog predavača. Evaluacija nije usmerena samo na znanje, veštine i stavove studenata, već na celokupni nastavni proces, na sve njegove aktere, pa uključuje i reflektivni osvrt nastavnika na sopstveni rad, kroz analizu planiranog, realizovanog i postignutog. U okviru svake naučne discipline izdvaja se grana koja se na naučnoistraživački način bavi nastavom te discipline. Nažalost, u časopisima koji su posvećeni nastavi i obrazovanju najmanje je istraživanja koja se odnose na univerzitetsko obrazovanje. Dominiraju istraživanja nastavne prakse u osnovnim i srednjim školama i to po pravilu ima više radova koji se odnose za nastavnu praksu u mlađim razredima osnovne škole. Iako se mnogi zaključci iz tih radova

mogu gotovo u potpunosti primeniti i na visoko obrazovanje, ono ima mnoge specifičnosti i svakako zaslužuje posebnu pažnju istraživača. Kada su u pitanju istraživanja koja se odnose na mešovito učenje, situacija odgovara upravo datom opisu, što ostavlja veliki prostor da se potencijali ovog modela dodatno istraže.

Ovom prilikom izdvajamo zaključke rada Alammary & al. (2014) koji analizira različite dizajne mešovitog učenja na kursevima u visokom obrazovanju. I ovde se ističe da ne postoji opšte prihvaćena definicija modela, pa i da su stoga nastavnici u visokom obrazovanju razvili različita shvatanja pojma, a onda su se razvili i različiti pristupi dizajnu. Upravo je odabir najprikladnijeg dizajnerskog pristupa za kurs glavni izazov za mnoge nastavnike koji tek usvajaju ideju mešovitog učenja.

Shvatanje pojma mešovito učenje od strane nastavnika obično čini osnovu za dizajn kursa koji će ovaj model promovisati. Tako, na primer, nastavnici, koji na mešovito učenje gledaju kao na jednostavnu metodu kombinovanja tradicionalnog učenja sa učenjem na mreži, dodaju dodatne mrežne aktivnosti u svoje tradicionalne kurseve licem u lice i to nazivaju mešovitim učenjem.

Ispitujući različite procese dizajniranja kombinovanih kurseva učenja, uočavaju se tri različita dizajnerska pristupa:

- 1) **mali uticaj mešovitog učenja** – dodavanje dodatnih aktivnosti postojećem kursu,
- 2) **srednji uticaj mešovitog učenja** – zamena aktivnosti u postojećem kursu,
- 3) **veliki uticaj mešovitog učenja** – izgradnja kursa od početka na strategiji koja podržava model mešovitog učenja.

Klasifikacija ovih pristupa napravljena je u skladu sa potencijalnim promenama u postojećem nastavnom planu programu i studentskom iskustvu učenja. U nastavku, ukratko su razmatrana sva tri pristupa dizajnu kursa, identifikovano je po nekoliko prednosti i izazova, na osnovu čega su formulisane i preporuke za nastavnike.

### **Pristup sa malim uticajem mešovitog učenja – dodavanje aktivnosti**

U pristupu sa malim uticajem, dodatne mrežne aktivnosti dodaju se tradicionalnom kursu licem u lice. Studija koju su sprovedi Kaleta & al. (2007) otkrila je da većina nastavnika koji dizajniraju „mešovite” kurseve dodaju mrežne komponente svojim tradicionalnim kursevima bez eliminisanja bilo koje od postojećih aktivnosti. Taj fenomen nazvali su „sindrom kurs i po”. Uočeno je da se dodavanje mrežnih aktivnosti na već uspostavljeni kurs obično dešava kada neiskusni nastavnici grade svoj prvi kombinovani kurs učenja. Jednostavnim dodavanjem, ovi nastavnici pokušavaju da iskoriste prednosti mešovitog učenja bez ulaganja napora u preispitivanje celokupnih ciljeva kursa u kontekstu modela mešovitog učenja. Međutim, evidentirani su i slučajevi gde je dodata aktivnost rezultat pedagoške potrebe i ispostavila se kao dragoceni dodatak tradicionalnom kursu.

#### *Prednosti*

- i. Lak pristup dizajniranju kombinovanih kurseva učenja, što potencijalno podstiče one nastavnike koji se kolebaju (jer misle da je mešovito učenje vrlo složeno i visoko tehnološki zahtevno) da ipak uključe mešovito učenje.
- ii. Brzi pristup izradi kursa sa mešovitim učenjem. Vođeni specifičnom pedagoškom potrebom, nastavnici mogu direktno da dodaju novu aktivnost koja na odgovarajući način zadovoljava tu

potrebu bez trošenja dodatnog vremena i napora za preispitivanje i ponovno planiranje celog kursa ili istraživanje mnogih mogućih kombinacija komponenata učenja i metoda izvođenja.

- iii. Nizak rizik od neuspeha kada se pažljivo primenjuje. Prema Vaughan (2007), tri glavna faktora rizika, koje su identifikovali nastavnici koji su držali „mešovite” predmete, jesu: strah od slabije ocene studenata, strah od gubitka kontrole nad predmetom i neizvesnost u vezi sa uticajem učenja na mreži na odnose u učionici. Dodavanje aktivnosti uz istovremeno zadržavanje tradicionalnog kursa može minimizirati ove rizike.
- iv. Minimalno iskustvo u predavanju tradicionalnog kursa je dovoljno za dizajniranje „mešovitog” kursa. I sa veoma ograničenim iskustvom, nastavnik može uočiti deo kursa koji bi mogao biti poboljšan dodatnom mrežnom aktivnošću.

#### *Izazovi*

- i. Nastavnici moraju da poseduju određeno tehnološko znanje da bi uspešno primenjivali ovaj pristup. Da bi uspešno integrisali tehnologiju u nastavno iskustvo, nastavnicima je potrebno znanje koje im može omogućiti: da utvrde koji tehnološki alat je potreban za postizanje određenog pedagoškog cilja, da znaju kako se alat koristi za pomoć studentu, da poboljšaju sposobnost studenata da koriste odgovarajuće tehnološke alate u različitim fazama procesa učenja (istraživanju, analizi i proizvodnji), da odaberu i usvoje tehnološke alate koji im mogu omogućiti da prepoznaju potrebe i reše probleme povezane sa sopstvenim profesionalnim razvojem.
- ii. Postoji visok rizik od stvaranja dva odvojena toka na kursu. Dodavanje rada na mreži, onlajn rada, tradicionalnom kursu bez smanjenja vremena u nastavi često dovodi do dva odvojena kursa, jednog onlajn i jednog licem u lice.
- iii. Dodavanje dodatne aktivnosti studenti mogu da vide kao teret, a ne kao bonus.
- iv. Dodavanje nove aktivnosti bez uklanjanja postojeće može prekomerno povećati opterećenje nastavnika. Nastavnici se mogu suočiti sa vremenskim ograničenjima i velikim opterećenjima kao rezultat dodavanja dodatnih nastavnih resursa na mreži.
- v. Važeći normativi za nastavničko opterećenje često ne prepoznaju dodatne aktivnosti na postojećem kursu, pa nastavnici stoga ne dobijaju naknadu za njihov dodatni trud (Amiel, 2007). Prema (Lee, Lee, 2008) neadekvatne nadoknade i odsustvo pravih podsticaja nastavnicima jedan su od glavnih faktora koji negativno utiču na upotrebu e-učenja.

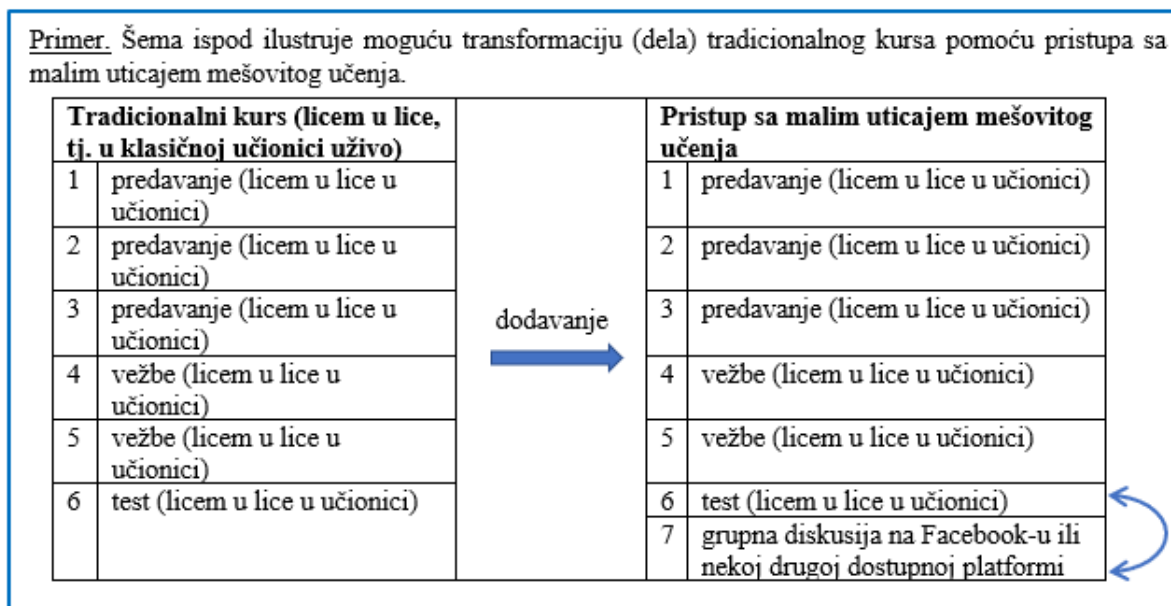
#### *Preporuke*

- i. Nastavnik treba da započne proces uvođenja mešovitog učenja u svoje kurseve dodavanjem jednostavnih aktivnosti na mreži, kojom će on i njegovi studenti moći lako da upravljaju, na primer forum za diskusiju. Kasnije, ako je potrebno više mrežnih aktivnosti, mogao bi da razmotri pristup sa srednjim uticajem koji uključuje zamenu aktivnosti.
- ii. Dodavanje aktivnosti mora biti vođeno specifičnom pedagoškom potrebom, a ne, recimo, tehnologijom zbog tehnologije. Stoga nastavnici moraju da otkriju šta je problematično ili nedostaje na njihovim kursovima i da razumeju kako da primene tehnologije i nastavne pristupe za rešavanje ovih problema.
- iii. Dodata aktivnost treba da bude dobro integrisana u kurs. Neophodno je razmotriti vezu između onoga što se dešava u nastavi i onoga što se dešava na mreži (Kaleta & al., 2007).
- iv. Kurs ne sme biti preopterećen zadacima i aktivnostima. Vredno je istražiti mišljenja studenata o komponentama kursa. Evidentno, dosledna i transparentna komunikacija sa studentima o



njihovim mišljenjima i očekivanjima jeste od suštinske važnosti za uspeh kombinovanog iskustva učenja.

- v. Mešavina sa malim uticajem preporučuje se nastavnicima bez iskustva u dizajniranju mešovitog učenja. Lako ga je primeniti i ima mali rizik od neuspeha.



### Pristup sa srednjim uticajem mešovitog učenja – zamena aktivnosti

U pristupu sa srednjim uticajem, postojeći kurs se redizajnira zamenom nekih aktivnosti licem u lice mrežnim komponentama. Pretpostavka jeste da će neki delovi kursa biti efikasniji kao mrežne aktivnosti. U nekim slučajevima, preostale sesije licem u lice održavaju se potpuno na isti način, dok se u drugim slučajevima izvršavaju neke promene u tim aktivnostima.

#### *Prednosti*

- i. Ovaj pristup omogućava nastavnicima da započnu jednostavno strategiju mešovitog učenja i da je postupno primenjuju zamenjujući komponente kursa prema potrebi.
- ii. Iskustvo stečeno korišćenjem ovog pristupa može pomoći izgradnji samopouzdanja nastavnika za primenu većeg obima mešovitog učenja na čitav kurs (Ertmer, Ottenbreit-Leftwich, 2010).
- iii. Ovo je koristan pristup za nastavnike sa određenim iskustvom u dizajniranju mešovitog učenja koji ne žele da rizikuju da naprave značajne promene na svojim kursevima. Kaleta & al. (2005) primetili su da nastavnici obično više vole da predaju na isti tradicionalni način koji im je poznat i da im je teško i izazovno da posvete značajnu količinu vremena i napora da razviju novi kurs.
- iv. Omogućava nastavnicima da eksperimentišu sa različitim pristupima učenju i koriste više vrsta obrazovnih tehnologija, a da se pritom ne izgube sve prednosti tradicionalnog kursa. Podučavanje i učenje primenom tehnologije, na odgovarajući i efikasan način, predstavlja izazov, ali se može poboljšati iskustvom.

### *Izazovi*

- i. Nastavnici moraju imati dobro tehnološko znanje i izvesno samopouzdanje da bi primenili ovaj pristup, jer nema povratka na prethodni metod poučavanja. U Ertmer, Ottenbreit-Leftwich (2010) istakli su da je poznavanje tehnologije od suštinskog značaja za olakšavanje učenja učenika, iako nije dovoljno.
- ii. Zamena i integracija novih komponenata kursa zahteva značajno vreme i napor.
- iii. Ne postoje definisani standardi koji bi usmeravali odluke o tome koliki ili koji deo kursa se može ili treba zameniti. Na takve odluke utiču mnogi faktori, uglavnom priroda sadržaja kursa i namere nastavnika (Vaughan, 2007).
- iv. Potrebno je prethodno iskustvo u predavanju tradicionalnog kursa. Ključni izazov prilikom dizajniranja mešovitog kursa učenja pomoću ovog pristupa jeste identifikovanje delova kursa koji nije bio najoperativniji u tradicionalnom formatu, a zatim odluka da li može bolje da funkcioniše na mreži. Imajući malo ili nimalo prethodnog iskustva u predavanju kursa, čini ovaj proces teškim.
- v. Intenzivno dugoročno planiranje, posmatranje i vrednovanje kursa neophodni su za uspešnu primenu. Uspostavljanje dobre ravnoteže između mrežnih komponenti i komponenti licem u lice rezultat je postepenog procesa uvođenja novih resursa ili tehnika kao zamene postojećih, a zatim i procene da li je upotreba ovih novih resursa ili tehnika pomogla studentima u postizanju ciljeva učenja (Duhaney, 2004).

### *Preporuke*

- i. Nastavnici bi trebalo postupno da pristupaju zameni aktivnosti. Početi sa premeštanjem malog dela nastavnog programa na mrežu, smanjujući pritom vreme (količinu) predavanja licem u lice, a zatim po potrebi izvršiti skaliranje dok se ne postigne harmonična ravnoteža između nastave uživo i onlajn.
- ii. Harmonična ravnoteža razlikovaće se od kursa do kursa. Varijacije postoje zbog niza faktora, uključujući karakteristike studenata, iskustvo nastavnika, stil nastave, ciljeve kursa i dostupne mrežne resurse. Na nekim kursevima više će biti nastave u realnoj učionici nego na mreži, dok će na drugim težište biti na mrežnim komponentama, a kod nekih će se donekle podjednako mešati ova dva modela podučavanja i učenja.
- iii. Postizanje harmonične ravnoteže zahteva stručnost i stalnu analizu i redovno vrednovanje kursa. Iterativni redizajn kursa podrazumeva uzimanje u obzir povratnih informacija kao ključnog faktora za poboljšanje kursa. Akumulirano iskustvo nastavnika u dizajniranju za kombinovano učenje može igrati vitalnu ulogu u postizanju ove ravnoteže.
- iv. Ovaj pristup mogu ostvariti nastavnici sa srednjim do velikim iskustvom u nastavi tradicionalnih kurseva. Tokom procesa zamene moraju se doneti mnoge ključne odluke, poput toga koliki ili koji deo kurseva može biti zamenjen (Vaughan, 2007), pa je iskustvo nastavnika od suštinskog značaja za donošenje ispravnih odluka.
- v. Institucionalna podrška je važna za uspeh ovog pristupa. Bitno je sistemsko pružanje tehničke podrške, s obzirom na opterećenje nastavnika i suočavanje sa njihovim eventualnim strahovima i otporom prema mešovitom učenju. Takođe, ključna je motivacija nastavnika za profesionalni razvoj, kako bi usvojili nove nastavne metode i ovladali novim tehnološkim alatima, te kako bi bili kompetentni da odluče o najprikladnijim metodama izvođenja nastave za dati kurs.

**Primer.** Šema ispod ilustruje moguću transformaciju (dela) tradicionalnog kursa pomoću pristupa sa srednjim uticajem mešovitoг učenja.

Tradicionalni kurs (licem u lice, tj. u klasičnoj učionici uživo)		zamena →	Pristup sa srednjim uticajem mešovitoг učenja	
1	predavanje (licem u lice u učionici)		1	predavanje (licem u lice u učionici)
2	predavanje (licem u lice u učionici)	2	google – hangout ili nešto slično	
3	predavanje (licem u lice u učionici)	3	predavanje (licem u lice u učionici)	
4	vežbe (licem u lice u učionici)	4	grupna diskusija na Facebook-u ili nekoj drugoj dostupnoj platformi	
5	vežbe (licem u lice u učionici)	5	vežbe (licem u lice u učionici)	
6	test (licem u lice u učionici)	6	onlajn test	

### Pristup sa velikim uticajem mešovitoг učenja – izgradnja od nule

U pristupu sa velikim uticajem, kombinovani kurs učenja gradi se od nule. Ovaj pristup je u literaturi opisan i kao potpuni redizajn, totalni redizajn, radikalne promene. Uobičajeni način primene ovog pristupa opisali su Harriman (2004) i Hofmann (2006). Oni su preporučili da umesto da pogleda čitav kurs, nastavnik treba da pogleda svaki ishod učenja pojedinog kursa. Za svaki ishod, nastavnik treba da odredi najbolji način postizanja tog ishoda. Predložili su da primenom ovog pristupa na nivou ishoda učenja nastavnici mogu dobiti najefikasniju kombinaciju tehnologija i stvoriti bolji kurikulum. Ovaj pristup je u skladu sa uobičajenim modelom razvoja kurikuluma, koji se naziva konstruktivno usklađivanje, u kojem su zadaci ocenjivanja usklađeni sa ishodima učenja. Hofmann (2006) je takođe dodao da je pogrešno pretpostavljati da će redizajniranje postojećeg kursa trajati kraće od izgradnje novog kursa.

#### *Prednosti*

- i. Pruža mogućnost poboljšanja i smanjenja ili uklanjanja problema koje postojeći kurs ima. Nastavnici započinju iz nove perspektive sa boljim šansama da osmisle uspešniji kurs, posebno kada su uočeni/prepoznati problemi kod tradicionalnog kursa.
- ii. Omogućava bolju integraciju mrežnih komponenti sa komponentama licem u lice. Prema Littlejohn, Pegler (2007), neophodno je izgraditi kurs od nule kako bi se stvorila efikasna integracija komponentata licem u lice sa mrežnim komponentatama.
- iii. Pruža nastavnicima priliku da dobiju maksimalnu korist iz mešovitoг učenja i da bolje zadovolje potrebe svojih studenata. Izgradnja kursa od nule pruža veće šanse za preispitivanje i redizajniranje celog kursa imajući u vidu potrebe studenata.

#### *Izazovi*

- i. Za uspešnu primenu ovog pristupa neophodan je visok nivo tehnološkog znanja i samopouzdanja. Sa visokim nivoom tehnološke kompetencije, nastavnici mogu lako ovladati novim tehnološkim alatima i koristiti ih na svojim kursevima. Wozney & al. (2006) otkrili su da je jedan od najvećih faktora koji utiče na integraciju tehnologije sa nastavom uverenje nastavnika da im ova tehnologija može pomoći da bolje postignu nastavne ciljeve.

- ii. Pristup ima veći rizik od neuspeha od ostalih pristupa, jer može rezultirati potpuno novim i neproverenim kursom koji će kao takav biti predstavljen studentima.
- iii. Nastavnici moraju uzeti u obzir veliki broj mogućih komponenti mešovitog učenja i u potpunosti razumeti njihove implikacije. Prema Walters (2008), veliki izbor medijuma za isporuku sadržaja, širok spektar tehnoloških alata i nedostatak primera koje treba slediti za određene kombinacije aktivnosti, uslovljavaju da se nastavnici suočavaju sa složenim odlukama koje treba doneti, a samim tim i velikim pritiskom prilikom redizajniranja kurseva.
- iv. Zahteva iskustvo u dizajniranju mešovitog učenja. Nastavnici kojima nedostaje neophodno teorijsko znanje i eksperimentalno iskustvo teško će u potpunosti iskoristiti mogućnosti koje mešovito učenje nudi. Poznavanje tehnologije i postepeno eksperimentisanje sa mešovitim učenjem mogu pomoći da se razume kako tehnologija može da unapredi nastavu.
- v. Planiranje i razvoj novog mešovitog kursa dugo traje. Vaughan (2007) je ustanovio da razvoj takvog kursa obično traje dva do tri puta duže od razvoja sličnog kursa u tradicionalnom formatu.

### *Preporuke*

Nastavnici bez iskustva u dizajnu mešovitog učenja ili sa ograničenim iskustvom prvo bi trebalo da isprobaju jedan od prethodna dva pristupa kako bi stekli značajno iskustvo koje im može pomoći u primeni ovog pristupa. Dizajniranje efikasnog kursa zasnovanog na mešovitom učenju zahteva veliko znanje i stručnost neophodnu za odabir aktivnosti učenja koje se bolje realizuju u učionici i drugih koje treba preneti na Internet (Walters, 2008). Mortera-Gutiérrez (2006) ističe da je jedan od najgorih scenarija za kurs zasnovan na mešovitom učenju da nastavnik ne koristi najprikladnije medijume za izvođenje nastave.

Nastavnici treba da budu spremni da ulože značajno vreme (barem 6 meseci, a preporučeno je godinu dana) u dizajn, kreiranje kursa. Jedna od najvećih prepreka za primenu uspešnog mešovitog učenja jeste nedostatak vremena.

Nastavnici treba da razmotre mogućnosti uključivanja različitih medijuma za isporuku sadržaja na njihovom kursu. Prema Carman (2005), e-učenje je najefikasnije kada koristi kombinaciju različitih mogućnosti isporuke.

Institucionalna podrška jeste ključni faktor za uspeh ovog pristupa. Prema Aycock & al. (2002), mora postojati visok nivo institucionalne podrške u obliku oslobađanja vremena, profesionalnog razvoja, finansiranja i tehničke podrške nastavnicima.

**Primer.** Šema ispod ilustruje moguću transformaciju (dela) tradicionalnog kursa pomoću pristupa sa velikim uticajem mešovitog učenja.

Tradicionalni kurs (licem u lice, tj. u klasičnoj učionici uživo)		potpuni redizajn →	Pristup sa velikim uticajem mešovitog učenja	
1	predavanje (licem u lice u učionici)		1	predavanje (licem u lice u učionici)
2	predavanje (licem u lice u učionici)	2	onlajn kviz pre predavanja + predavanje (licem u lice u učionici)	
3	predavanje (licem u lice u učionici)	3	google – hangout + konsultacije licem u lice u učionici	
4	vežbe (licem u lice u učionici)	4	priprema za vežbe pre časa + vežbe licem u lice u učionici	
5	vežbe (licem u lice u učionici)	5	onlajn test	
6	test (licem u lice u učionici)			

### Završna razmatranja

Uzimajući u obzir veliki broj mrežnih komponenti koje treba razmotriti, nastavnici bi trebalo da prođu odgovarajuće obuke (profesionalni razvoj kao predavača) koje se fokusiraju na pravilnu upotrebu novih obrazovnih tehnologija koje ranije nisu iskusili.

Mali uticaj mešovitog učenja	→	Srednji uticaj mešovitog učenja	→	Veliki uticaj mešovitog učenja
1. Nastavnik nema iskustva u dizajniranju i realizaciji mešovitog učenja.		1. Nastavnik je dizajnirao i realizovao kurs pomoću mešovitog učenja.		1. Nastavnik ima višegodišnje iskustvo u dizajniranju i realizaciji mešovitog učenja.
2. Nastavnik nema prethodno iskustvo u realizaciji kursa na tradicionalan način.		2. Nastavnik realizovao kurs na tradicionalan način.		2. Nastavnik je u nekoliko iteracija realizovao kurs na tradicionalan način.
3. Nastavnik donekle ima znanje o integraciji tehnologije u nastavu.		3. Nastavnik dobro poznaje mogućnosti integracije tehnologije u nastavu i ume da ih sprovede.		3. Nastavnik odlično poznaje mogućnosti integracije tehnologije u nastavu i ume da ih sprovede.
4. Nastavnik nema poverenje/sigurnost pri integraciji tehnologije u nastavu.		4. Nastavnik donekle ima poverenje/sigurnost pri integraciji tehnologije u nastavu.		4. Nastavnik ima veliko poverenje/sigurnost pri integraciji tehnologije u nastavu.
5. Nema institucionalne podrške za promenu oblika nastave.		5. Postoji institucionalna podrške za promenu oblika nastave.		5. Postoji jaka institucionalna podrške za promenu oblika nastave.

Slika 4. Faktori koji utiču na izbor pristupa u dizajnu kursa

Glavni savet jeste da nastavnici bez iskustva u dizajniranju mešovitog učenja treba da počnu sa pristupom sa malim uticajem, a kada steknu više iskustva mogu da pređu na srednji uticaj i samo kada

imaju dovoljno samopouzdanja, znanja i iskustva sa mešovitim učenjem, spremni su za pristup sa velikim uticajem. Krajnji cilj treba da bude preispitivanje celokupnih ciljeva kursa imajući u vidu potrebe studenata. Ovaj cilj se može lakše postići izgradnjom čitavog puta od nule. Takav pristup može omogućiti nastavnicima da počnu iz nove perspektive, preispitujući celokupan kurs i moguće medijume isporuke koje će integrisati u svoje kurseve prvenstveno imajući u vidu potrebe studenata. Međutim, prelazak direktno na pristup velikog uticaja mešovitog učenja je rizičan i može rezultirati neuspjehom. Upoznavanje sa tehnologijom i postepeno eksperimentisanje sa mešovitim učenjem su put tokom kojeg nastavnici imaju priliku da steknu više samopouzdanja i da na pravi način sagledaju mogućnosti unapređenja tradicionalne nastave uplivom tehnologije.

## Obrnuta učionica

*Obrnuta učionica* jeste vrsta mešovitog učenja i predstavlja strategiju poučavanja koja ima cilj da poveća angažovanje studenata i uspješnije učenje kroz specifičan način upotrebe tehnologija i primene principa aktivnog učenja u nastavnom procesu.

**Obrnuta učionica** kao model nastave zasniva se na ideji izokretanja tradicionalne nastavne paradigme, tako da su glavne aktivnosti procesa poučavanja i učenja, poput aktivnosti u učionici i domaćih zadataka, obrnute (izvrnute) u odnosu na tradicionalni model. Usvajanje gradiva odvija se samostalno, pre časa, a primena usvojenog na rešavanje zadataka i problema odvija se u učionici (Tabela 2).

	Pre časa	Na času	Nakon časa
<b>Tradicionalna učionica</b>		Usvajanje novog gradiva (poučavanje od strane nastavnika)	Primena i produblivanje usvojenog znanja (izrada domaćih zadataka)
<b>Obrnuta učionica</b>	Usvajanje novog gradiva (samostalno učenje iz video materijala, izdvojenih tekstova, ...)	Primena i produblivanje usvojenog znanja (kroz aktivnosti na času)	

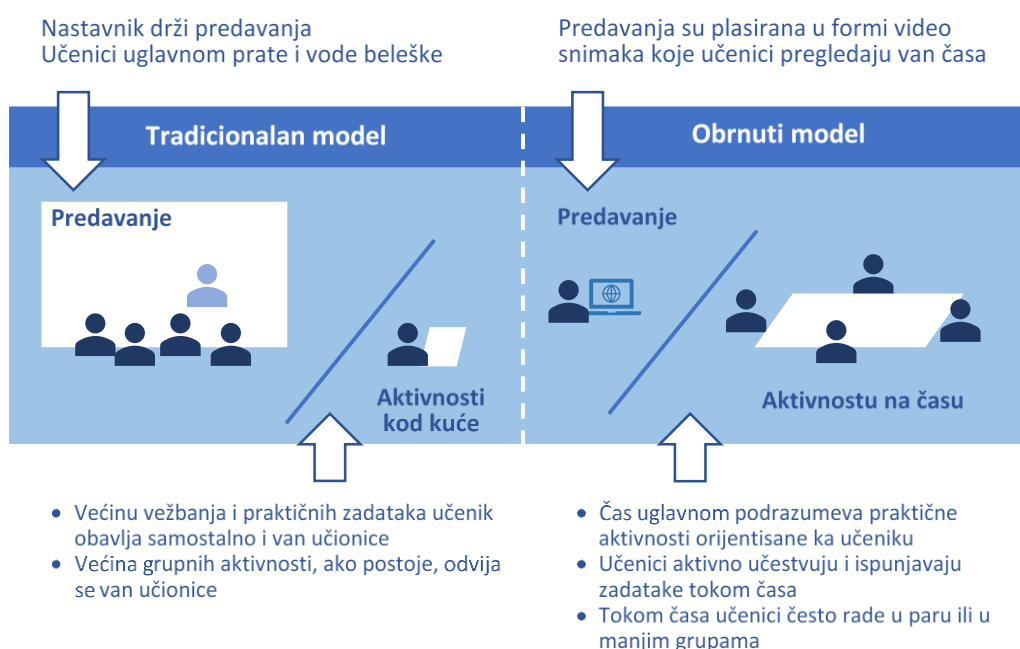
Tabela 2. Obrnuta učionica u odnosu na tradicionalnu učionicu – uporedni prikaz rasporeda aktivnosti u tradicionalnoj i obrnutoj učionici

Prva implementacija obrnute učionice zabeležena je u ranom XIX veku, na američkoj vojnoj akademiji West Point. Nastavnici akademije uveli su model nastave koji je podrazumevao obavezu studenata da prouče nastavne materijale pre časova, dok su na časovima u okviru manjih grupa zajednički rešavali probleme za čije im je rešavanje bilo potrebna primena koncepata i upotreba informacija koje su usvojili pre časa.

U današnjim uslovima, samostalno učenje koje obrnuta učionica podrazumeva uglavnom je potpomognuto različitim tehnologijama. U literaturi se kao savremeni začetnici ovakvog metoda učenja, primenom informacionih tehnologija, navode Jonathan Bergmann i Aaron Sams, nastavnici hemije u tadašnjoj srednjoj školi Woodland Park u Koloradu. Oni su 2000. godine (Bergman, 2012), pokušavajući da reše probleme koji su se javljali zbog učestalih izostanaka učenika, koji su imali veliki

broj vannastavnih aktivnosti, počeli da beleže svoje časove i objavljuju ih na Youtube platformi, omogućavajući učenicima pregled materijala u bilo koje vreme.

Obrnuta učionica može uključiti širok spektar vannastavnih aktivnosti: pregled/praćenje unapred pripremljenih snimaka predavanja, proučavanje pisanih materijala, istraživanje, domaće zadatke... Budući da osnovne informacije i koncepti moraju biti predstavljenu materijalima koje učenik proučava pre časa, izuzetno je važan odabir metoda i vrsta nastavnih materijala koji podstiču/obezbeđuju angažovanje učenika. Od nastavnika se očekuje da budu u stanju da odabirom načina plasiranja informacija privuku pažnju studenata i motivišu ih na angažovanje u sopstvenom procesu učenja. Zahvaljujući načinu plasiranja materijala za samostalan rad, obrnuti model učionice omogućava studentima da uče sopstvenim tempom (Lopes, 2018). Aktivnosti u nastavi mogu se bitno razlikovati u odnosu na tradicionalnu učionicu, uključujući aktivnosti kao što su igra uloga, debate, kvizovi i grupne prezentacije. Za razliku od tradicionalne nastave, nastavni oblici obrnute učionice, naročito oni koji se primenjuju na samom času, obično su vezani za neku formu grupnog rada i po pravilu uključuju saradnju među studentima (**Error! Reference source not found.**).

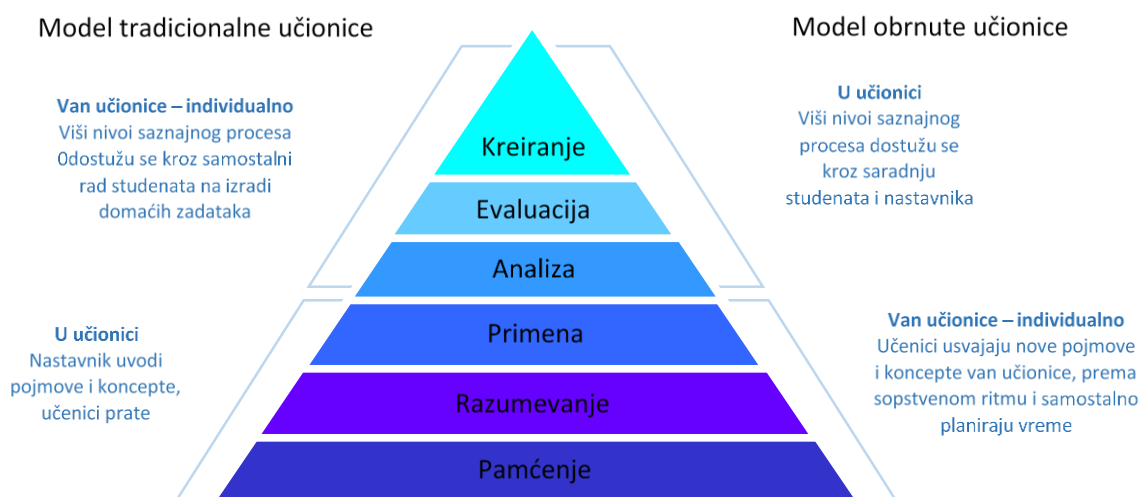


Slika 5. Tradicionalni model u odnosu na model obrnute učionice

Pri planiranju nastave i učenja po modelu obrnute učionice nastavnik mora da:

- strukturira aktivnosti studenata koje se odvijaju pre časa,
- definiše sredstva kojima će nastavni sadržaji biti predstavljeni studentu,
- kreira nastavne sadržaje i učini ih dostupnim studentima,
- isplanira aktivnosti za čas tako da podstakne studente na aktivno učenje, pomogne im da budu u mogućnosti da uoče sopstvene greške u razumevanju, pronađu sopstveni tempo i što je najznačajnije, da ih nauči kako da uče,
- strukturira međusobnu komunikaciju studenata i podstakne vršnjački pomognuto učenje.

Način postizanja ishoda učenja u obrnutoj učionici izmenjen je u odnosu na tradicionalnu. Ako kao instrument za definisanje ishoda učenja uzmemo Blumovu taksonomiju i pođemo od toga da kognitivni proces podrazumeva šest nivoa (počevši od najjednostavnijih do najsloženijih zahteva (pamćenje, razumevanje, primena, analiza, evaluacija, kreiranje), koncept tradicionalne nastave najčešće podrazumeva da se prva tri nivoa postižu/dostižu kroz aktivnosti u učionici, dok se u obrnutoj učionici ti nivoi ostvaruju u fazi pripreme za čas, tj. pre časa. Nivoi znanja od 4. do 6, koji zahtevaju složenije kognitivne radnje u obrnutoj učionici postižu se uz podršku nastavnika i na samom času, dok se u tradicionalnoj učionici oni, u manjoj ili većoj meri, ostvaruju aktivnostima studenata koje su planirane nakon časa (Slika 6).

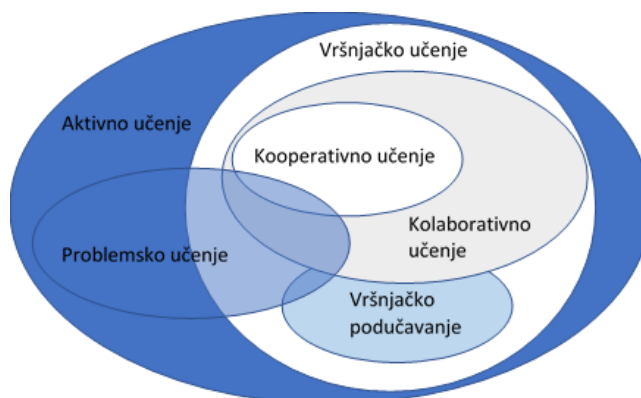


Slika 5. Postizanje ishoda kategorisanih prema Blumovoj taksonomiji u tradicionalnoj i obrnutoj učionici

Teorijske osnove opravdanosti obrnute učionice uglavnom se oslanjaju na istraživanja u oblasti učenja usmerenog na studenta, čiji je glavni cilj aktivno uključivanje studenata u proces učenja, a glavni vid učenja **aktivno učenje**. Metode aktivnog učenja, karakteristične za obrnutu učionicu, jesu:

- učenje putem rešavanja problema (problemska nastava) (eng. *problem solving*),
- vršnjački pomognuto učenje, kroz međusobno podučavanje, rad u grupama (saradničko učenje) ili timovima (kooperativno učenje).

Zajedničko za ove strategije učenja jeste promenjena uloga nastavnika. U njima **nastavnik ima ulogu vodiča/menadžera tima**.



Slika 6. Teorije i metodi učenja usmerene na studenta (Bishop, 2013)



Studije koje se bave potrebnim kompetencijama zaposlenih u savremenom društvu govore u prilog važnosti pristupima kao što su problemska nastava i vršnjačko učenje, zbog sve veće potrebe za profesionalcima koji će vladati kognitivnim procesima viših nivoa i veštinama timske saradnje i rešavanja novih problema (Bentley, 2016).

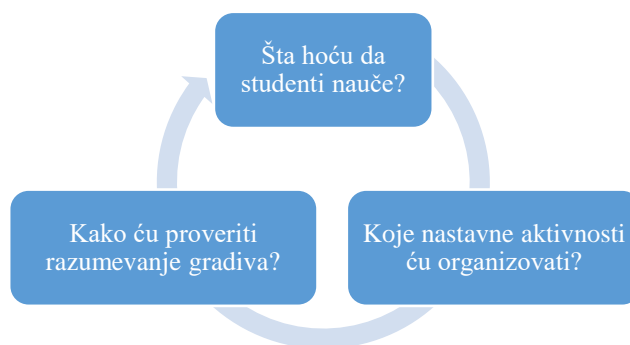
### Izazovi u implementaciji obrnute učionice

- i. Za realizaciju aktivnosti koje se odvijaju van učionice potrebno je da studenti poseduju sopstvene uređaje i imaju pristup internetu, što nije u svim sredinama podjednako moguće ostvariti.
- ii. Nije jednostavno proveriti da li je student sav materijal pre časa pregledao/usvojio.
- iii. Motivisati studente da samostalno uče nije jednostavan zadatak. Motivacija nije kod svih ista i na istom nivou, pa time ni tempo napredovanja nije isti. To može biti problem u planiranju aktivnosti koje bi trebalo da omoguće studentima da uče svojim tempom, ali da pri tome prate gradivo i ostatak grupe (Nielsen, 2012).
- iv. Za određen broj studenata samostalni rad je isto što i domaći zadatak, kojem se studenti najčešće ne raduju. Dodatno, ukoliko nastavnik ne proceni dobro vreme potrebno za te aktivnosti, a uz to veći broj nastavnika takođe primenjuje model obrnute učionice, lako može doći do prevelikog opterećenja studenata.
- v. Implementacija obrnute učionice zahteva od nastavnika da bude dovoljno vešt u korišćenju potrebnih tehnologija.
- vi. Nastavnik mora više vremena da utroši na pripremu i organizaciju kompletnog procesa. Od njega se očekuje da obezbedi individualizovan pristup i praćenje svih aktivnosti studenata. Dodatno, očekuje se da evaluacija, pre svega formativna, bude raznovrsnija i češća.

### Dizajn Obrnute učionice

Za efikasnu i uspešnu obrnutu učionicu potrebna je pažljiva priprema. Za svaku lekciju/nastavnu jedinicu mora biti definisan plan. **Plan nastavne jedinice** mora imati definisane tri bitne komponente:

- **ishode**, kojima nastavnik odgovara na pitanje *Šta želim da studenti nauče?*
- **aktivnosti**, kojima nastavnik odgovara na pitanje *Koje ću nastavne metode koristiti?*
- **strategije za proveru napredovanja i postignuća studenata**, kojima nastavnik odgovara na pitanje *Kako ću proveriti razumevanje naučenog?*



Slika 7. Ključna pitanja pri planiranju nastave i učenja

## Ishodi

Pre definisanja ishoda nastavnik bi trebalo da odgovori na sledeća pitanja.

- Šta je tema lekcije?
- Šta želim da studenti nauče?
- Šta želim da razumeju i da mogu da urade na kraju časa?
- Koji su najvažniji koncepti/ideje/veštine koje želim da studenti usvoje i zašto su oni važni?

Preporučuje se primena Blumove taksonomije da bi se opisao kognitivni proces kroz koji se očekuje da studenti prođu.

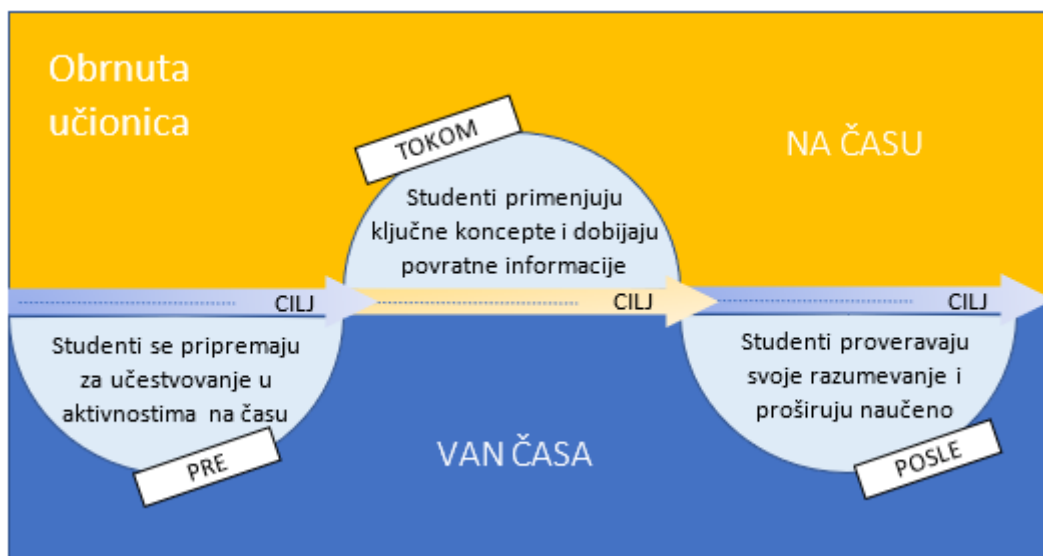
Primer. U formulacijama ishoda mogu se koristiti glagoli koji opisuju radnje koje se odvijaju na odgovarajućim nivoima Blumove taksonomije: „Na kraju časa učenik će moći da...”

Nivo Blumove taksonomije	Radnje	
„Pre časa”	pamćenje razumevanje	definisati, navesti, zapamtiti, ponoviti, podsetiti rezimirati, objasniti, raspravljati, demonstrirati
„Na času”	primena analiza evaluacija kreiranje	koristiti, demonstrirati, primeniti, ilustrovati uporediti, ispitati, povezati, kategorizovati kritikovati, suditi, recenzirati, braniti, validovati, testirati, argumentovati konstruisati, dizajnirati, kreirati, simulirati, osmisliti

## Aktivnosti

Plan aktivnosti treba da obuhvati njihov raspored prema periodu u kom se odvijaju (Slika 8):

- „pre časa”,
- „tokom časa” i
- „posle časa”.



Slika 8. Raspored aktivnosti u obrnutoj učionici

Planiranje aktivnosti bez obzira na strategiju podrazumeva da nastavnik bude u stanju da odgovori na sledeća pitanja.

- Kako da objasnim temu?
- Na koje sve načine mogu ilustrovati koncepte koje ću predstaviti?
- Kako da zainteresujem studente za temu i motivišem ih da se angažuju?
- Postoje li odgovarajući primeri, analogije ili situacije iz stvarnog života ili prethodnog gradiva koji mogu pomoći studentima da razumeju novo gradivo?
- Šta je potrebno da studenti urade da bi bolje razumeli gradivo?

Specijalno, kada je strategija obrnute učionice u pitanju, neophodno je razmotriti i sledeća tri pitanja.

- Da li je materijal efikasan i relevantan za predstavljenu temu?
- Da li studenti imaju pristup materijalu?
- Da li studenti znaju kako da koriste materijal?

Aktivnosti „pre časa” imaju cilj da pripreme studenta za aktivnosti na času. Pored njihovog definisanja, potrebno je odrediti na koji način će nastavnik pružiti povratnu informaciju studentima o tome da li su uspešno savladali gradivo, na nivou potrebnom za uspešno učestvovanje u aktivnostima „na času”. Ova provera ne mora biti samo deo aktivnosti „pre časa”. U jednoj formi se može planirati za tu fazu nastave, a sa ciljem davanja odgovarajućih povratnih informacija studentu. S druge strane, provera postignuća na času ima cilj da pomogne nastavniku da uoči probleme u razumevanju, pored toga što mu omogućava registrovanje napretka studenata.

Cilj planiranja aktivnosti „na času” jeste odabir aktivnosti koje će obezbediti dublje razumevanje teme i osposobljavanje studenata za obavljanje kognitivnih radnji višeg nivoa. Za sve aktivnosti „na času” neophodno je pripremiti jasna uputstva koja će biti studentima data na početku časa. Da bi se obezbedila dosledna implementacija i dinamika, neophodno je napraviti vremenski raspored aktivnosti.

**Primer.** Primer aktivnosti vezanih za nastavne jedinice sa temom Programiranje nastavnih aktivno-sti planiranih u skladu sa principima obrnute učionice. Primer je preuzet iz Hartyányi, 2017 i odnosi se na kurs namenjen obuci nastavnika za primenu metoda obrnute učionice.

Vreme trajanja	Aktivnosti	Ogranizacija nastave		
		Metode	Oblici rada	Alati
10 minuta	Provera naučenog tokom aktivnosti pre časa	Gemfikacija	Individualni. Cela grupa polaznika	Kahoot
15 minuta	Izborzadataka		Individualni	Beležnica
5 minuta	Definisanje grupa studenata na osnovu odabira pozicija		Grupni (kooperativno učenje) Uloge:	Štoperica
50 minuta	Definisanje nastavnih aktivnosti i njihovo didk-tičko programiranje	Studija slučaja	Koordinator: organizuje i pokreće posao	Jedan laptop po grupi
25 minuta	Prezentovanje urađenog			Dato

			Sekretar: Beleži relevantne informacije i deli napisane dokumente Kontrolor: proverava usklađenost vremenskih odrednica i ispunjavanja zadataka Portparol: Govori u ime grupe i razrešava sa nastavnikom dileme na koje je grupa naišla	
15 minuta	Evaluacija urađenog, kao i sprovedenih aktivnosti		Individualni i grupni	Alati za evaluaciju: ankete, rubrike i ček-liste

Aktivnosti „nakon časa” nisu obavezan deo obrnute učionice, ali u zavisnosti od tematike mogu biti od značaja. Njihov cilj bi trebalo da bude da obezbede dugotrajnije usvajanje znanja, sposobnosti i stavova. Uz to mogu poslužiti i za uvođenje u tematiku narednog časa.

### **Praćenje/evaluacija napredovanja i postignuća učenika**

Evaluacija se usmerava ka proveru ispunjenosti definisanih ishoda. Neophodno je razmisliti kojim aktivnostima je moguće proveriti da li je svaki od njih postignut. Treba definisati način evaluacije, zajedno sa kriterijumima, standardima za ocenjivanje, kao i načinom pružanja povratnih informacija studentima.

Jedna od važnih karakteristika strategije obrnute učionice jeste usmerenost na učenika/studenta i ona bi trebalo da bude primenjena i u procesu evaluacije. Savremene tendencije u nastavi podrazumevaju kontinuirano praćenje aktivnosti i postignuća studenata. U pristupu usmerenom na studenta evaluacija podrazumeva kontinuirano praćenje i redovno davanje povratnih informacija o procesu učenja. U skladu sa planiranim aktivnostima mogu se primeniti sledeće vrste evaluacije, u zavisnosti od toga ko sprovodi evaluaciju i čiji rad se procenjuje:

- procena individualnih postignuća svakog studenta pojedinačno od strane nastavnika,
- evaluacija grupnih aktivnosti od strane nastavnika,
- samoevaluacija,
- vršnjačka evaluacija.

U implementaciji obrnute učionice evaluacija se integriše u proces podučavanja i/ili učenja sa ciljem unapređivanja procesa učenja (eng. *assessment for learning*).

Neadekvatna priprema studenata za učešće u aktivnostima na času može ozbiljno ograničiti efikasnost obrnute učionice. Iz tog razloga je od posebnog značaja planiranje formativnih evaluacija koje bi trebalo da budu sastavni deo aktivnosti „pre časa“, tzv. **preformativne evaluacije** (eng. *pre-formative assessment*) (Hartyányi 2017, Persky 2017). One se primenjuju kada studenti samostalno savlađuju novi materijal, a pre nego što se uključe u bilo kakvu grupnu interakciju. Preformativna procena daje pouzdanu predstavu o tome šta su učenici/studenti naučili pre časa ili bilo kakvih grupnih

aktivnosti. Takođe, u plan evaluacije nastavnik bi trebalo da uključi personalizovano praćenje i aktivnosti kao što su:

- korišćenje materijala izvan učionice,
- pravilna primena koncepata u različitim kontekstima,
- aktivno učešće u komunikacijama uživo,
- saradnja sa drugim studentima.

## Alati obrnute učionice

Tehnologije koje se mogu koristiti za implementaciju obrnute učionice i koje će biti predstavljene u nastavku podelićemo u četiri kategorije:

- 1) alati za kreiranje videa (eng. *video creation*),
- 2) servisi za postavljanje videa (eng. *video hosting*),
- 3) alati za kreiranje interaktivnih videa (eng. *video interaction*),
- 4) sistemi za upravljanje učenjem (eng. *Learning Management Systems*).

### Alati za kreiranje videa

Samostalno kreiranje video materijala ne mora biti skupo, pa ni vremenski zahtevno. Oprema koja je potrebna, u današnje vreme, najčešće je deo standardne konfiguracije računara koje standardni korisnici poseduju, a to su:

- mikrofona,
- veb ili video kamera,
- tabla za pisanje ili pametna tabla (ukoliko je ustanova poseduje) – u zavisnosti od oblasti samog predmeta i prirode sadržaja i zadataka, tabla može u manjoj ili većoj meri biti neophodna.

Za beleženje samog materijala mogu se koristiti dve vrste softverskih alata.

- Alati za snimanje dešavanja na celom ekranu ili delu ekrana. Najčešće imaju mogućnost snimanja i audio zapisa sa mikrofona, kao i beleženja zvuka sa samog sistema.
- Softver za snimanje videa, zapisa sa kamere. Ovakvi softveri imaju mogućnost smeštanja video zapisa u posebnom prozoru i njegovog usklađivanja sa snimkom ekrana.

Postoji veliki broj alata koji omogućavaju jednostavno snimanje video materijala. Neki od popularnih su:

#### - *Screencast-o-matic*

Web platforma koja omogućava snimanje ekrana direktno iz web brauzera, beleženje signala sa kamere i mikrofona, kao i postavljanje slike u slici. Ima podršku za postprodukciju.

Moguće je koristiti je bez novčane naknade, uz određena ograničenja u korišćenju alata. Zahteva registraciju, a zatim i instalaciju alata za preuzimanje sadržaja ekrana.

Besplatna verzija dozvoljava snimanje materijala ne dužih od 15 minuta.

Uputstva za korišćenje: <https://screencast-o-matic.com/tutorials>

#### - *Camtasia Studio*

Komercijalni softverski alat koji dozvoljava snimanje ekrana ili nekog njegovog dela, kao i snimka sa kamere, koji se može postaviti kao slika u slici. Moguće je snimanje iz MS Power Point prezentacije.

Dozvoljava uređivanje videa, dodavanje multimedijalnih sadržaja, oblačića, animacija i primenu različitih efekata na video i audio zapise.

Uputstva za korišćenje: <https://academy.techsmith.com/>

#### - **MS Power Point**

MS Power Point poseduje besplatan dodatak koji omogućava snimanje slajdova i dodavanje slike sa kamere. Moguće je i snimanje ekrana.

Uputstvo za korišćenje: <https://support.microsoft.com/en-us/office/record-a-presentation-2570dff5-f81c-40bc-b404-e04e95ffab33>

### **Servisi za postavljanje videa**

Za postavljanje videa moguće je koristiti različite besplatne servise dostupne na internetu. Najpoznatiji servis je **YouTube**, a u okviru MS Office 365 Suit paketa nalazi se i **MS Stream**. Takođe, većina platformi za podršku učenju na daljinu imaju mogućnost postavljanja video materijala.

#### - **YouTube**

Servis za postavljanje i deljenje video materijala. Podržava veliki broj formata prilikom postavljanja videa: .mov, .mpeg4, .mp4, .avi, .wmv, ...

Bez posebnih uslova moguće je postaviti snimke u trajanju do 15 minuta. Moguće je postaviti i duže uz dodatne provere i uslove koji za potrebe nastavnika nisu ograničavajući.

Ima podršku za prikaz videa u različitim rezolucijama, kao i podršku za živi prenos (eng. live streaming).

Uputstvo za postavljanje: <https://support.google.com/youtube/answer/57407>

#### - **MS Stream**

Platforma koja omogućava strimovanje video materijala iz web čitača. Dostupan je prijavljenim korisnicima.

Omogućava postavljanje, editovanje, pregled i komentarisanje video materijala.

Uputstvo za korišćenje: <https://www.youtube.com/watch?v=3oKMXC9xhe0>

### **Alati za kreiranje interaktivnih videa**

Interaktivni video materijali podrazumevaju video sadržaje proširene elementima koji omogućavaju interakciju sa studentima. Postoji više aplikacija koje to omogućavaju, a neke od njih su navedene ispod.

#### - **EdPuzzle**

Besplatna web aplikacija koja omogućava postavljanje video sadržaja i njihovo prilagođavanje potrebama nastave. Video je moguće seći, dodavati pitanja, kvizove i komentare, kao i dodati audio zapise. Platforma nudi veliki broj već postavljenih video materijala dostupnih za upotrebu, koje je, takođe, moguće doradivati.

Pre postavljanja materijala, u okviru svog naloga nastavnik definiše predmet za koji se materijal kreira, a studentima dostavlja kodove za pristup. O aktivnostima studenata dobija izveštaje.

Uputstvo za korišćenje: <https://support.edpuzzle.com/hc/en-us/categories/360000701132-For-Teachers>

#### - **PlayPosit**

Web aplikacija koja omogućava dodavanje interaktivnih elemenata u video materijale koji su postavljeni na servisima za strimovanje videa kao što su YouTube i Vimeo. Moguće je dodavanje pitanja, zadataka i kvizova kojima se proverava razumevanje materijala izloženog u videu, kao i praćenje aktivnosti i postignuća studenata.

Uputstvo za korišćenje: <https://knowledge.playposit.com/category/209-playposit-30>

## Sistemi za upravljanje učenjem

Sistemi za upravljanje učenjem (eng. *Learning Management System – LMS*) predstavljaju softverske sisteme koji omogućavaju virtuelno, kolaborativno okruženje za podršku celokupnom nastavnom procesu. Sistemi za učenje omogućavaju podršku za:

- postavljanje nastavnih materijala u različitim formatima (tekst, slike, audio i video zapisi) i njihovo organizovanje u različitim formama, kao što su blogovi, forumi, klasične web strane,...
- organizaciju onlajn testova i domaćih zadataka u različitim formama,
- praćenje aktivnosti i napretka studenata,
- komunikaciju nastavnika i studenata, 1-1 i grupnu, i komunikaciju između samih studenata,
- pristup u bilo kom vremenu i sa bilo kog mesta,
- ažuriranje materijala u realnom vremenu.

Neki od najpoznatijih LMS sistema su **Moodle** i **Canvas**, a pored navedenih, postoji čitav niz popularnih sistema koji, u manjoj ili većoj meri, omogućavaju organizaciju i upravljanje nastavnim sadržajima i praćenje aktivnosti učenika kao što su: **Blackboard**, **Piazza**, **EdModo**, **Google Classroom**, **MS Teams**.

### - Moodle

Besplatan sistem za upravljanje učenjem otvorenog koda. Za instalaciju i korišćenje potrebno je imati obezbeđen server i podršku za administraciju instalacije.

Nudi širok spektar alata za kreiranje i upravljanje sadržajima, praćenje napredovanja studenata kroz testove, kvizove i zadatke, upravljanje korisnicima, korisničkim ulogama i grupama korisnika. Za komunikaciju između studenata i nastavnika moguće je koristiti forume, wiki ili chat.

Ova platforma je u širokoj upotrebi u velikom broju zemalja i u Srbiji, kako na univerzitetima, tako i u srednjim školama. Prevedena je na više od 100 jezika.

Više o platformi: [https://docs.moodle.org/310/en/Main\\_page](https://docs.moodle.org/310/en/Main_page)

### - Canvas

Besplatna web platforma. Za korišćenje zahteva samo registraciju. Svaki predmet koji kreira na svom nalogu nastavnik mora objaviti da bi ga učinio dostupnim studentima.

Moguće je postavljati obaveštenja, zadatke, diskusije, testove i kvizove.

Ova platforma je posebno popularna na univerzitetskim kursevima širom sveta.

Više o platformi: <https://beaver.instructure.com/courses/670/pages/welcome-to-canvas-for-beginners>

## Napomene vezane za kreiranje video materijala

Kreiranje kvalitetnih video materijala zahteva nastavnika koji je iskusan ili, bar, spreman da uložiti vreme i stekne iskustvo u korišćenju tehnologija za kreiranje video materijala. Za veliki broj tema postoje vrlo kvalitetni video materijali dostupni na internetu. Na nastavniku je da ih pronade i proceni da li mogu biti odgovarajući za planirane nastavne teme/jedinice.

Postoji više bitnih preporuka kojih se treba pridržavati pri kreiranju edukativnih video materijala namenjenih studentima (Bergman, 2012).

- **Kratka forma**

Trajanje videa ne bi trebalo da odgovara jednom času ili dvočasu. Video bi trebalo da ima kraću formu i da ne bude duži od 10 do 15 minuta. Preporuka je da se jednim videom obradimo jedna tema/pojam/postupak. Ograničavanje vremena zahteva jasno fokusiranje na najvažnije činjenice i primere. To nikako ne znači da se nastavni sadržaji moraju svesti na minimum, već je potrebno odrediti manje i jasno definisane porcije sadržaja koji će biti jednim videom obrađeni.

- **Dinamika govora koja animira slušaoca**

Osnovni nastavni materijal koji se prikazuje tokom video lekcije je obično prezentacija ili nekakva druga forma statičnog sadržaja, što samo po sebi ne drži pažnju slušalaca. Dinamiku diktiraju, pre svega, priča predavača i aktivnosti kao što su pisanje beleški, pojava objekata, animacije kojima je prikazan nekakav proces i slično. Kada je u pitanju priča predavača, njena dinamika zavisi od promena tonaliteta i načina govora.

- **Uključite predavača sagovornika**

Uključivanje sagovornika u prezentaciju tako da jedan sagovornik ima ulogu eksperta, a drugi ulogu učenika, postavljajući pitanja i iznoseći najčešće dileme učenika, može biti od velike pomoći u usvajanju i razumevanju gradiva.

- **Anegdote i duhovite opaske u kratkoj formi**

Duhovite opaske, slike, anegdote mogu pomoći u držanju pažnje.

- **Držite se teme**

Svaki primer ili priča moraju biti opravdani i u funkciji razumevanja problema/pojma koji se objašnjavaju sl.

- **Pisanje beleški tokom izlaganja**

Upotreba digitalne olovke za pisanje formula, izvođenja, obeležavanje bitnih činjenica na prezentaciji podstiče i drži pažnju slušalaca.

- **Ubacivanje opisnih oblačica**

Objekat, tekst ili grafički oblik, koji se pojavljuje pored/preko snimka ekrana privlači pažnju učenika. Skretnje pažnje na važne činjenice o kojima se govori tokom lekcije moguće je izvesti objektima koji se pojavljuju tokom videa u trenutku kada je važno zaključiti, naglasiti ili ponoviti važno.

- **Zumiranje delova ekrana**

U alatima za postprodukciju moguće je uvećati deo snimka koji je za tekuće izlaganje bitan i time dodatno skrenuti pažnju studenata na bitne delove sadržaja ili one koji se trenutno objašnjavaju.

- **Obratite pažnju na prava korišćenja i distribucije tuđih materijala**



## Primeri primene Obrnute učionice

Navešćemo dva primera primene modela obrnute učionice, pri čemu se jedan odnosi na obuku nastavnika, tj. kurs profesionalnog usavršavanja, a jedan se odnosi na univerzitetski kurs. Uloga ovih primera jeste da ilustruju prethodno date teorijske opise i daju dodatne ideje za realizaciju drugih univerzitetskih kurseva po sličnom modelu.

**Primer 1. – Obuka nastavnika za korišćenje video materijala.** Pokazaćemo kako je na primeru pilot projekata obuke nastavnika za planiranje i kreiranje video materijala namenjenih primeni u nastavi, korišćen model obrnute učionice (Hartyányi, 2017).

Obuka je trajala 5 nedelja. Teme koje je obuhvatala date su u Tabela 3.

Nedelja 1	Nedelja 2	Nedelja 3	Nedelja 4	Nedelja 5
Preprodukcija	Izrada knjige snimanja Uvod u kameru	Angažovanje učenika Principi multimedije Upotreba kamere	Principi produkcije Editovanje snimaka	Objavljivanje materijala

Tabela 3. Obuka nastavnika za planiranje i kreiranje video materijala namenjenih primeni u nastavi – raspored tema po nedeljama

Na početku svake nedelje polaznicima su bile dostupne 40-minutne video lekcije, koje su uključivale i aktivnosti polaznika u trajanju od 10 minuta.

Dva puta nedeljno organizovane su uživo jednočasovne radionice. Dinamika radionica data je u Tabela 4.

Vreme trajanja	Aktivnosti	Oblici rada	Alati
5 minuta	Pregled napretka u izradi projekta	Cela grupa	Prezentacija/Kahoot
10 minuta	Brza rekapitulacija video lekcije/a	Cela grupa	Video
15 minuta	Otvorena diskusija i debata	Manje grupe Instruktor kao moderator	Mape uma
10 minuta	Kolaborativne aktivnosti	Cela grupa	Brainstorming alati
15 minuta	1-1 diskusija i rešavanje problema	Individualno	N/A
5 minuta	Dodatna razmatranja projekta	Cela grupa	Alati za evaluaciju ili prikupljanje podataka

Tabela 4. Obuka nastavnika za planiranje i kreiranje video materijala namenjenih primeni u nastavi – dinamika aktivnosti na radionicama

Evaluacija se zasnivala na podnošenju dokaza o napretku svake nedelje, na osnovu predmetne oblasti koja se predaje. Tako na primer, u 1. nedelji, u kojoj je tema bila preprodukciju, učesnici su morali da predaju priču i/ili scenario, dok su u 2. nedelji, koja je bila posvećena korišćenju kamere, morali da predaju kratak snimak koji su snimili, kao i kratak tekst o sopstvenim stavovima o napretku i samom procesu izrade.

## **Primer 2. – Univerzitetski kurs.**

Pokazaćemo kako je na primeru univerzitetskog kursa Web programiranja na Univerzitetu Se-verna Karolina primenjena strategija obrnute učionice. U Maher (2015) sumirana su višegodišnja is-kustva nastavnika u organizaciji ovog kursa.

Kurs prati od 60 do 90 studenata. Teme koje se obrađuju obuhvataju jezike potrebne za razvoj web servisa (html, css, javascript i jquery), kao i teme koje se tiču dizajna samih servisa. Kompletan kurs se sprovodi u formi obrnute učionice od 2013. godine.

Nedeljna dinamika kursa podrazumeva samostalni rad studenata pre časova i rad u malim gru-pama na samim časovima. Nedeljne grupne aktivnosti podrazumevaju laboratorijske vežbe, čiji se plan i ciljevi daju studentima na uvid pre same aktivnosti.

Upoznavanje sa nastavnim sadržajima, koji se daju studentima u formi videa i tekstova, predviđeno je za aktivnosti pre časa, dok se na časovima ne drže predavanja i ne ponavljaju teme koje su date u pripremnom materijalu. Od studenata se očekuje da kodove programa objašnjenih u datim materijalima samostalno isprobaju.

U aktivnosti van učionice uključeni su i zadaci kao što su pronalaženje web strana kojima se demonstrira tema koja se obrađuje, crtanje konceptualnih dijagrama i pisanje pseudokodova. Ove ak-tivnosti sprovode se u grupama. Zahvaljujući tome što se od studenata očekuje da određene pro-gramerske veštine razvijaju prvo samostalno, aktivnosti i diskusija na nastavi su razumljivije i manje apstraktne. Upotreba Moodle platforme za praćenje aktivnosti i komunikaciju omogućila je kontrolu ispunjenosti zahteva. Za sve aktivnosti pre časa definisan je redosled, jasan i dostupan studentima, pa je tako studentima onemogućeno da učestvuju u pojedinim aktivnostima, kao što su kvizovi, ukoliko nisu ostale pripremne aktivnosti označene kao završene.

Jedna od ključnih aktivnosti na časovima su laboratorijske vežbe. Na svakom času studenti dobijaju zadatke koje rešavaju u parovima. Na početku kursa zadaci se uglavnom sastoje iz izmena i proširivanja datog koda, dok se kasnije očekuje pisanje koda od početka. Veštine i znanja potrebne za izradu zadataka usklađeni su sa temama predviđenim za tekuću nedelju. Laboratorijske aktivnosti pla-niraju se tako da ukoliko je student pripremljen za čas, ispunjavanje zahteva bude izvodljivo u predviđenom vremenu. Određivanje parova studenta koji će raditi zajedno se menja na nedeljnom ili dvonedeljnom nivou. Sastavni deo svakog časa jeste kviz. Na različite načine kvizovi se koriste kao aktivnost kojom se podstiče vršnjačko učenje, ali i uočavanje i otklanjanje grešaka u razumevanju, i to:

- Svaki student radi svoj primerak kviza. Kvizovi se unakrsno distribuiraju među studentima na ocenjivanje. Nastavnik učestvuje u analizi ocena kroz diskusiju o razlozima ispravno-sti/neis-pravnosti odgovora na svako pitanje.
- Student samostalno popunjava kviz, a zatim se o ispravnosti odgovora usaglašava sa studentima koji sede u njegovoj blizini sve dok svi studenti koji su međusobno susedi nemaju iste odgo-vore. Svaki student se ocenjuje posebno.
- Studenti se dele u grupe. Za svako pitanje grupa mora da se usaglasi oko toga šta je tačan odgovor, nakon čega se tako definisan grupni odgovor unosi u kviz grupe. Svi studenti u grupi dobijaju jednu ocenu.
- Studenti učestvuju u onlajn kvizu (*clickers*), pri čemu im je dozvoljeno da međusobno komuniciraju. Nastavnik prikazuje statistiku i može da ponovi ispitivanje. Pri bodovanju se

porede brzine i ispravnosti odgovora. Davanje takmičarskog konteksta u ovakvim kvizovima povećava anagažovanje i motivaciju studenata.

- Studenti se dele u grupe. Svaka grupa dobija video materijal na osnovu čijeg sadržaja osmišljava kviz. Grupe unakrsno rešavaju kvizove, pri čemu kreatori kviza ocenju odgovore.

Bez obzira na način sprovođenja kviza, fokus je na vršnjačkom učenju i otkrivanju grešaka u razumevanju gradiva (pojmovi, koncepti, tvrđenja, postupaka...). Ukoliko postoje problemi u razumevanju, nastavnik na licu mesta pruža studentima dodatna objašnjenja ili održi kratko fokusirano predavanje. Iz tog razloga, kvizovi vrlo često zauzimaju značajan deo časa.

Mišljenje studenata se posebno uvažava na ovom kursu. Anketiranje studenata se sprovodi tokom trajanja kursa i na samom kraju, sa ciljem dobijanja povratnih informacija vezanih za način realizacije kursa. U otvorenim anketama studenti su se izjasnili da su u odnosu na tradicionalni način organizovanja nastave bili u većoj meri uključeni u samu nastavu, kao i da je komunikacija i saradnja sa drugim studentima bila značajnija. Komentari su u najvećem broju bili pozitivni i pokazali da studenti vole da budu uključeni u aktivnosti koje podrazumevaju praktičnu primenu teorije (eng. hands-on). Na primer, neki od komentara su bili: „Svidelo mi se to što ima više hands-on aktivnosti od drugih časova” i „Svidelo mi se što su mi laboratorijski zadaci zapravo pomogli da učim na času i to što su svi video snimci bili korisni.” Odgovarajući na pitanje šta im se u ovom modelu nastave nije svidelo, studenti su navodili da im je potrebno više vremena za laboratorijske aktivnosti, kao i da je izrada kvizova pre laboratorijskih zadataka nepoželjna. Mali procenat studenata se izjasnio nepovoljno o ovakvoj vrsti organizacije nastave. Oni su kao razloge za takav svoj stav navodili obrazloženja kao što su: „Ocenjivani smo na sadržajima koji nisu kasnije obrađivani na času.” i „Gledajući video imao sam utisak da pratim on-line čas”. Ovakvi komentari posledica su nerazumevanja samog modela učenja u obrnutoj učionici, što pokazuje da je upoznavanje studenata sa načinom rada i ciljevima ovakve nastave veoma važno, pa mu treba posvetiti odgovarajuću pažnju, jer će dobro razumevanje obezbediti odgovarajuću motivaciju studenata. Detaljniji prikaz rezultata anketiranja studenata može se videti u Maher (2015).

## Literatura

- Amiel, T., Orey, M. (2006). Do you have the time? Investigating online classroom workload. *Journal of Educational Technology Systems*, 35, 31–43.
- Alammary, A., Sheard, J., & Carbone, A. (2014). Blended learning in higher education: Three different design approaches. *Australasian Journal of Educational Technology*, 30(4), 440–454. <https://doi.org/10.14742/ajet.693>
- Aycock, A., Garnham, C., & Kaleta, R. (2002). Lessons learned from the hybrid course project. *Teaching with Technology Today*, 8(6), 9–21. Retrieved from <http://www.uwsa.edu/ttt/articles/garnham2.htm>
- Barbour, M. (2014). History of K-12 Online and Blended Instruction Worldwide: Handbook of Research on K-12 Online and Blended Learning. N.P., ETC Press Publ., pp. 25–50.
- Bergman J. & A. Sams (2012). *Flip Your Classroom. Reach Every Student in Every Class Every Day*, International Society for Technology in Education, USA
- Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A survey of the research. Paper presented at the 120th American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition, Atlanta, GA, 23–26 June 2013 (pp. 23.1200.1 – 23.1200.18)

- Bloom, B. S. (ed.) (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain*. New York: Longmans, Green.
- Carman, J. M. (2005). *Blended learning design: Five key ingredients*. Learning Technical Report. Agilant.
- Clark, R. C. (2002). The New ISD: Applying Cognitive Strategies to Instructional Design. *Performance Improvement Journal*, 41(7). <https://doi.org/10.1002/pfi.4140410704>
- Duhaney, D. C. (2004). Blended learning in education, training, and development. *Performance Improvement*, 43(8), 35–38. doi:10.1002/pfi.4140430810
- Ertmer, P. A., & Ottenbreit-Leftwich, A. T. (2010). Teacher technology change: How knowledge, confidence, beliefs, and culture intersect. *Journal of Research on Technology in Education*, 42, 255–284. doi:10.1080/15391523.2010.10782551
- Harriman, G. (2004). Blended learning. Retrieved from [http://www.grayharriman.com/blended\\_learning.htm#1](http://www.grayharriman.com/blended_learning.htm#1)
- Hartyányi M. et al. (2017). *Flipped classroom in practice*. [https://www.flip-it.hu/en/system/files/konyvek/flipit\\_book\\_en.pdf](https://www.flip-it.hu/en/system/files/konyvek/flipit_book_en.pdf)
- Hofmann, J. (2006). Why blended learning hasn't (yet) fulfilled its promises. In C. J. Bonk & C. R. Graham (Eds.), *Handbook of blended learning: Global perspectives, local designs* (pp. 27–40). San Francisco, CA: Pfeiffer Publishing.
- Kaleta, R., Skibba, K., & Joosten, T. (2007). Discovering, designing, and delivering hybrid courses. In A. G. Picciano & C. D. Dziuban (Eds.), *Blended learning research perspectives* (pp. 111–143). Needham, MA: Sloan-C.
- Lee, S., & Lee, H. (2008). Professors' perceptions and needs on blended e-learning. Paper presented at the World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2008, Las Vegas, Nevada, USA. Retrieved from <http://www.editlib.org/p/29737>
- Littlejohn, A., & Pegler, C. (2007). *Preparing for blended e-learning*. Abingdon, Oxon: Taylor & Francis.
- Maher M. L., Latulipe C., Lipford H. & Rorrer A. (2015). *Flipped Classroom Strategies for CS Education*. In Proceedings of the 46th ACM Technical Symposium on Computer Science Education (SIGCSE '15). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 218–223.
- Mortera-Gutiérrez, F. (2006). Faculty best practices using blended learning in e-learning and face-to-face instruction. *International Journal on E-learning*, 5, 313–337. <http://www.editlib.org/j/IJEL/>
- Lopes A.P. & Soares F. (2018) *Flipping a mathematics course, a blended learning approach*. 12th International Technology, Education and Development Conference, Valencia, Spain, 5–7 March, 2018 (pp. 3844–3853)
- Persky AM, McLaughlin JE (2017). *The Flipped Classroom - From Theory to Practice in Health Professional Education*. *Am J Pharm Educ*. 2017; 81(6):118
- Polja, Dj. (1966). *Kako ću rešiti matematički zadatak?*, Školska knjiga, Zagreb
- University of Texas at Austin (2021). *Flipped Classroom*. Retrieved from <https://facultyinnovate.utexas.edu/instructional-strategies/flipped-classroom> (Accessed: 25/04/2021).
- Vaughan, N. (2007). Perspectives on blended learning in higher education. *International Journal on E-Learning*, 6, 81. <http://www.editlib.org/j/IJEL/>
- Zemke, R. (2002). Who Needs Learning Theory Anyway? *Training Magazine*, 39(9), 86–88.

Walters, B. (2008). Blended learning-classroom with on-line. The CALSCA Online Magazine.  
Retrieved from [http://calsca.com/Writings/walters\\_blended\\_learning.htm](http://calsca.com/Writings/walters_blended_learning.htm)

Wozney, L., Venkatesh, V., & Abrami, Pp. (2006). Implementing computer technologies: Teachers' perceptions and practices. *Journal of Technology and Teacher Education*, 14, 173–207.  
<http://www.editlib.org/j/JTATE/>

**Autori:**  
**Nebojša Jasić**  
**Siniša Đurašević**



## **Modernizacija nastave i učenja biologije**

TEME:

Nastavne metode u biologiji

Od tradicionalnog ka interaktivnom  
učenju na Biološkom fakultetu  
Univerziteta u Beogradu

Primena interaktivnih virtualnih  
rešenja

Osvrt na doprinos TeComp projekta  
modernizaciji nastave

## Sadržaj

Uvod.....	70
Nastavne metode u biologiji .....	70
Od tradicionalnog ka interaktivnom učenju na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu .....	72
Primena interaktivnih virtualnih rešenja .....	74
Osvrt na doprinos TeComp projekta modernizaciji nastave .....	77
Literatura.....	77

## Uvod

Biologija je kompleksna nauka čije izučavanje/učenje kod nekih pojedinaca obuhvata period od početka opšteg obrazovanja pa do završetka akademske karijere. Tokom tog perioda susrećemo se sa različitim potrebama i ciljevima učenja biologije, a samim tim i sa različitim metodama učenja.

Jedan od međunarodnih ciljeva vezanih za budućnost čovečanstva je izgradnja održivog društva, što podrazumeva takav razvoj čovečanstva u kome sadašnja generacija ljudi zadovoljava svoje potrebe ne ugrožavajući neku buduću generaciju da uradi to isto (Brundtland, 1987). Taj cilj nužno uključuje ekološku, ekonomsku i socijalnu dimenziju, a ekološki izazovi su neodvojivi deo biologije pa je iz tog razloga neophodno posvetiti posebnu pažnju učenju biologije od opšteg osnovnog obrazovanja pa na dalje. Taj problem su neke zemlje prepoznale pre ostalih, pa se Finska, Švedska i Danska, na primer, smatraju osnivačima modernih metoda učenja biologije. U literaturi nema mnogo studija koje se bave procenom značaja nastavnih metoda u biologiji (Jeronen et al., 2017), ali one se svakako razlikuju u zavisnosti od toga da li se biologija izučava u okviru opšteg obrazovanja ili na akademskom nivou, da li se nastava odvija u prirodi ili u učionici/laboratoriji, da li su grupe studenata veće ili manje,... Zato je u literaturi moguće pronaći radove koji se bave nastavnim metodama u fiziologiji (Rehan et al., 2016, Santhakumari Nagothu et al., 2016, Sri Nageswari et al., 2004), ćelijskoj biologiji (Veselinovska et al., 2011), ekologiji (Jeronen et al., 2017),...

U ovom tekstu pokušaćemo da naglasimo neke probleme sa kojima se susreću nastavnici na svim nivoima nastave biologije, ali i predložimo rešenja, s obzirom na moderan pristup učenju ovog predmeta i problem koji nam nameće trenutna situacija, a to je rad na daljinu.

## Nastavne metode u biologiji

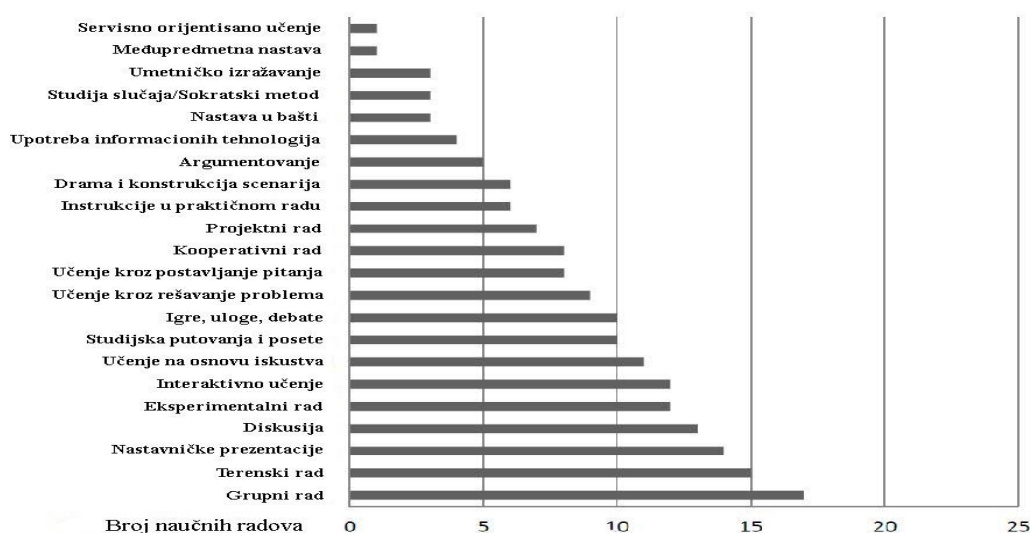
Nastavne metode mogu da se posmatraju kao aktivnosti usmerene ka cilju, kao i protok informacija od nastavnika ka studentima. Proučavanje nastavnih metoda je važno jer one utiču na sve tipove učenja, kako na kognitivnom, tako i na afektivnom i psihomotornom planu (Karami et al., 2012). Tradicionalna nastava biologije je deduktivna, a objedinjuje metode i principe instruiranja koje nastavnik koristi kako bi postigao željeni proces učenja i/ili pamćenja kod studenta. U takvom pristupu učenju, sa nastavnikom u centru, nastavnici su autoriteti a studenti imaju ulogu u pasivnom primanju informacija kroz lekcije i direktne instrukcije. Alternativni nastavni pristup je induktivan a instrukcija započinje sa opažanjem, eksperimentalnim rezultatima koje treba objasniti ili realnim problemom koji

treba rešiti. U ovakvom pristupu učenju, sa studentom u centru, nastavnik i studenti imaju jednako aktivnu ulogu u procesu učenja. Glavna uloga nastavnika u tom procesu je da usmerava studente, olakšava proces učenja i shvatanja materijala (Prince and Felder, 2006). Izbor nastavne metode najčešće zavisi od toga koju vrstu nastavnog pristupa preferira nastavnik, a ređe od samog cilja učenja.

U nastavi biologije, odabrane nastavne metode trebalo bi da omoguće učenje bioloških činjenica, savladavanje praktičnog rada, kao i učenje o biologiji kao nauci. Osim toga, više bioloških tema zahteva pristupe koji uključuju rešavanje eksperimentalnih problema i razvoj veština neophodnih za samostalan rad i organizaciju praktičnog rada (Keselman, 2003). Pošto proces istraživanja u nauci podrazumeva angažovanje viših kognitivnih nivoa, podrazumeva se da studenti na tom nivou već poseduju određeni stepen osnovnog (činjeničnog) znanja, kao i da imaju sposobnost za samostalno učenje. Zato je u procesu učenja važno implementirati metode koje uključuju kako samostalno istraživanje tako i usmerenu (instruiranu) nastavu. Implementacija modela učenja koji se zasniva na rešavanju problema ima pozitivan uticaj na akademska postignuća studenata kao i na njihov stav ka pojedinačnim kursevima (Akinoglu and Tandogan, 2007). Osim toga, implementacija učenja zasnovanog na rešavanju problema u kombinaciji sa grupnim radom ohrabruje studente da razmišljaju kritički kroz planiranje, diskutovanje, postavljanje pitanja i definisanje problema, kao i predlaganje rešenja (Asyari et al., 2016).

Nastavne aktivnosti koje se sprovode na terenu obezbeđuju studentima interaktivna i autentična iskustva, kao i mogućnost za iskustveno učenje, što povećava pažnju studenata i doprinosi efikasnosti učenja (Simmons et al., 2008). Terenski rad daje studentima priliku da posmatraju prirodu i svoje okruženje te da tako testiraju ideje i koncepte koje su naučili u učionici.

Iz svega navedenog može se zaključiti da moderna nastava biologije sve više koristi interaktivne metode rada sa studentima, stavljajući studente u centar nastavnog procesa. Ovo potvrđuju Jeronen i saradnici (Jeronen et al., 2017) u revijskom radu u kom su, između ostalog, proučavali koje nastavne metode su najzastupljenije u procesu nastave vezane za održivi razvoj iz aspekta biologije.



Slika 1. Zastupljenost nastavnih metoda u procesu nastave vezane za održivi razvoj iz aspekta biologije.

Preuzeto i modifikovano iz: (Jeronen et al., 2017)

Iz grafika se vidi da je najčešće korišćen metod grupnog rada, zatim terenski rad, eksperimentalni rad, interaktivno i iskustveno učenje. Nastavničke prezentacije i diskusije su takođe



popularne a korišćene su uglavnom pri upoznavanju studenata sa načinom i ciljevima rada. Takav pristup je u skladu sa radovima koji sugerišu da aktivno učenje pozitivno deluje na učvršćivanje memorije (Grant, 1997), podstiče motivaciju za učenjem (Kern and Carpenter, 1986) i razvija praktične veštine. Terenski rad ima pozitivan uticaj i na dugotrajnu memoriju usled povezivanja iskustva sa naučenim činjenicama.

Problemske situacije, kooperativno učenje i argumentovanje kao nastavne metode korišćene su u najmanje 1/5 proučavanih radova. Argumentovanje podstiče kritičko razmišljanje a ukoliko se koristi istovremeno sa kolaborativnim radom, podstiče studente da se više posvete zadatom problemu (Driver et al., 2000).

Međupredmetno učenje i servisno orijentisano učenje su ređe zastupljene metode ali ne treba ih zanemarivati jer mogu da izazovu javni interes i podstaknu lokalne, državne i druge uticajne službe da podrže odabrane ciljeve u obrazovanju.

Iz svega navedenog može da se zaključi da moderan pristup nastavi biologije podrazumeva interaktivno učenje, sa studentom koji se nalazi u centru tog procesa i nastavnikom koji ima jednako aktivnu ulogu u usmeravanju, podsticanju, kreiranju problemskih situacija i scenarija, ali i instruiranju i obučavanju. U našim kurikulumima postoji otpor ka ovakvom tipu učenja pa često i sami studenti nerado pristupaju interakcijama plašeći se da će da se "osramote" ukoliko javno daju netačan odgovor ili pogrešno zasnovanu ideju. Ipak, imajući u vidu brojne radove koji podržavaju ideju o interaktivnom učenju kao savremenom pristupu nastavi, opravdano je insistirati na takvoj tranziciji.

Dalje slede primeri navedene tranzicije iz prakse Biološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na kojima ćemo pokušati da pokažemo da je otpor promenama univerzalan pratilac istih, ali da je potencijalna korist to što treba da prevagne u planiranju nastave i odabiru metoda.

## **Od tradicionalnog ka interaktivnom učenju na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu**

Teorijska nastava iz većine predmeta na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu i danas se odvija na tradicionalan način, u vidu predavanja koja studenti slušaju, nakon čega nastavnik vrši ispitivanje i daje ocenu prema prethodno utvrđenom i poznatom kriterijumu. To znači da studenti uglavnom, uprkos brojnim obavezama iz datog predmeta (praktične vežbe, teorijska nastava, kolokvijumi,...), i dalje ulažu veliki trud i vreme za pripremanje završnog ispita u usmenoj formi, često i mnogo vremena nakon što su pohađali nastavu iz tog predmeta. Kao rezultat takve organizacije, prolaznost na ispitima je uglavnom osrednja a veliki broj studenata se muči da uhvati korak sa tekućim obavezama i zaostalim ispitima.

Kako nastavnici nisu u obavezi da prilagode nastavu potrebama studenata ili savremenim trendovima, nastavne metode uglavnom pripadaju onima gde je nastavnik u centru procesa a studenti pasivno primaju informacije. Ukoliko nastavnik prepozna problem pasivnosti studenata tokom nastave, i dalje je u problemu jer praktično ne postoje kursevi koje bi taj nastavnik mogao da pohađa u cilju svog usavršavanja i poboljšanja kvaliteta nastave. Vremenom, to uglavnom obeshrabri i one najambicioznije nastavnike, te se pomenuta tranzicija odvija veoma sporo.

Tu se možemo osvrnuti na iskustva jednog od naših kolega koji je prepoznao problem i bio dovoljno istrajan da potraži rešenje. Dolazak do rešenja detaljno je opisan u literaturi (Vujovic, 2016). Ukratko, profesor Vujović je, prepoznajući problem, aplicirao za stipendiju Fulbrajtovog programa posvećenog razvoju fakulteta i, nakon odobravanja stipendije, započeo je svoje usavršavanje na "Koledžu za prirodne nauke Univerziteta Teksas u Ostinu". Tamo je zapazio da nastavnik, ukoliko želi da čas bude interaktivan, mora da instruiira studente kako da se pripreme za predstojeće predavanje. Na taj način, studenti samostalno stiču osnovno znanje i to pre nego što pristupe času. Kako bi bio siguran da su studenti ispunili zadatak, nastavnik im daje kratke upitnike čije rešavanje je deo završne ocene. Time je nastavnik u mogućnosti da na samom času usmeri studente ka višim kognitivnim procesima, birajući odgovarajuće nastavne metode koje ne spadaju u oblast pukog prenosa informacija. Ovo je odgovornost nastavnika koji mora da osmisli aktivnosti koje će podstaći kompleksnije forme razmišljanja kod studenata, poput analiziranja i procenjivanja. Kao što smo ranije videli, to su sve metode koje za cilj imaju učvršćivanje znanja uz istovremeno podsticanje radoznalosti i zanimanja studenta za predmet. Jedna od primenjenih metoda može da bude diskusija među studentima, pre nego što se odluče koji odgovor da daju na postavljeno pitanje. Dalje, moguće je postavljati pitanja sa višestrukim ponuđenim odgovorima, rešavanje problemskih situacija, interpretacija odabranih tabela, grafika, poređenje različitih bioloških procesa, itd.

Kako bi se studenti motivisali na proaktivan pristup nastavi, pogotovo u okruženju koje je često vezano za tradicionalan pristup nastavi, korisno je pripremiti listu ciljeva i zadataka koji podsećaju studente na koji način se njihove aktivnosti vrednuju i kako učestvuju u formiranju završne ocene. Pokazalo se da se studenti u prvo vreme opiru ovakvom pristupu, verovatno zato što su navikli da se snalaze u drugačijem sistemu, u kom bez obzira na sve pojedinačne aktivnosti tokom semestra, i dalje moraju da se pripremaju na završni ispit, od koga im ocena najviše zavisi. S obzirom na to, možemo pretpostaviti da je lako izgubiti iz vida prednost konstantnog rada koji se vrednuje na odgovarajući način. Tako dolazimo do zaključka da je u našem okruženju jedan od najzahtevnijih ciljeva nastavnika stimulisanje studenata da budu aktivni tokom celog semestra. Šta pokazuju konkretni rezultati takvog pristupa nastavi na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu? Kao prvo, došlo je do povećanja broja studenata koji pohađaju predavanja (sa oko 3% na preko 80% od svih studenata koji su prijavili kurs)(Vujovic, 2016). Dalje, povećao se broj studenata koji dolaze na konsultacije i to do te mere da je bilo potrebno organizovati grupne konsultacije koje su se održavale u regularnim periodima. Na kraju, oko 90% studenata uspešno je završilo kurs do kraja tekućeg semestra, što je značajno poboljšanje u odnosu na nekadašnjih oko 30%. Ipak, oko 7% studenata nije uspeo da se privikne na novi način nastave, učenja i testiranja.

Profesor Vujović u svom radu (Vujovic, 2016) zaključuje da je prelazak sa tradicionalnog na interaktivno učenje vredno iskustvo, kako za njega tako i za njegove studente. Trebalo bi pomenuti da među kolegama nastavnicima na Univerzitetu u Beogradu postoji veliki interes za znanjima i iskustvima koje je profesor Vujović stekao u SAD tako da su održana brojna predavanja na tu temu, a pojedini nastavnici već uključuju neke od predloženih aktivnosti u svoja predavanja. Autor ovog dela teksta se pridružuje takvom zaključku, s obzirom na to da je i sam imao uvid u način rada i razmišljanja studenata koji su prethodno pohađali kurs profesora Vujovića.

Imajući u vidu sve do sada rečeno, dolazi se do zaključka da je modernizacija nastave neophodna i da od nje korist mogu imati i nastavnici i studenti. Studenti će steći kompleksnija znanja i

oslobodiće se strahova od debata i diskusija a nastavnicima će biti izazovnije da rade u takvom proaktivnom okruženju. Takođe, imajući u vidu još jedan izazov koji u poslednje vreme značajno utiče na realizaciju svih nastavnih aktivnosti, bez obzira na tip obrazovne ustanove (rad na daljinu), u narednom delu teksta pokušaćemo da kroz primere približimo upotrebu informacionih tehnologija u nastavi biologije.

## Primena interaktivnih virtualnih rešenja

Upotreba informacionih tehnologija u nastavi biologije pratila je razvoj neophodnih hardverskih i softverskih paketa, pa se tako prvi radovi koji se bave ovom temom u literaturi pronalaze pre 40ak godina (Katz et al., 1978). Ne računajući veoma kompleksne računarske metode predviđanja različitih pojava u biologiji, koje olakšavaju rad naučnika na terenu ili u laboratoriji i dovode do novih naučnih saznanja (Dortel et al., 2020), danas postoje i brojni programski paketi koji na jednostavan ali zadovoljavajući način mogu da simuliraju biološke pojave i tako pomognu nastavnicima da na interaktivan i zanimljiv način obogate nastavu biologije.

Jedan od tih programskih paketa koristi se u nastavi fiziologije/endokrinologije na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu već desetak godina. U pitanju je “PhysioEx: Laboratory Simulations in Physiology”, programski paket koji je dostupan već dugi niz godina (Zao et al., 2005). Verzija programskog paketa koji smo mi počeli da koristimo je PhysioEx v6.0 i sastoji se od 13 modula i 40 laboratorijskih simulacija iz oblasti fiziologije, koje se mogu koristiti kao dodatak ili zamena za rad u laboratoriji. Programski paket koji ćemo detaljno objasniti u ovom tekstu (PhysioEx v8.0), javno je dostupan na internet adresi:

[https://wps.pearsoned.com/bc\\_physioex\\_8\\_ap\\_lms/112/28698/7346697.cw/index.html](https://wps.pearsoned.com/bc_physioex_8_ap_lms/112/28698/7346697.cw/index.html)

Programski paket se sastoji od 12 modula:

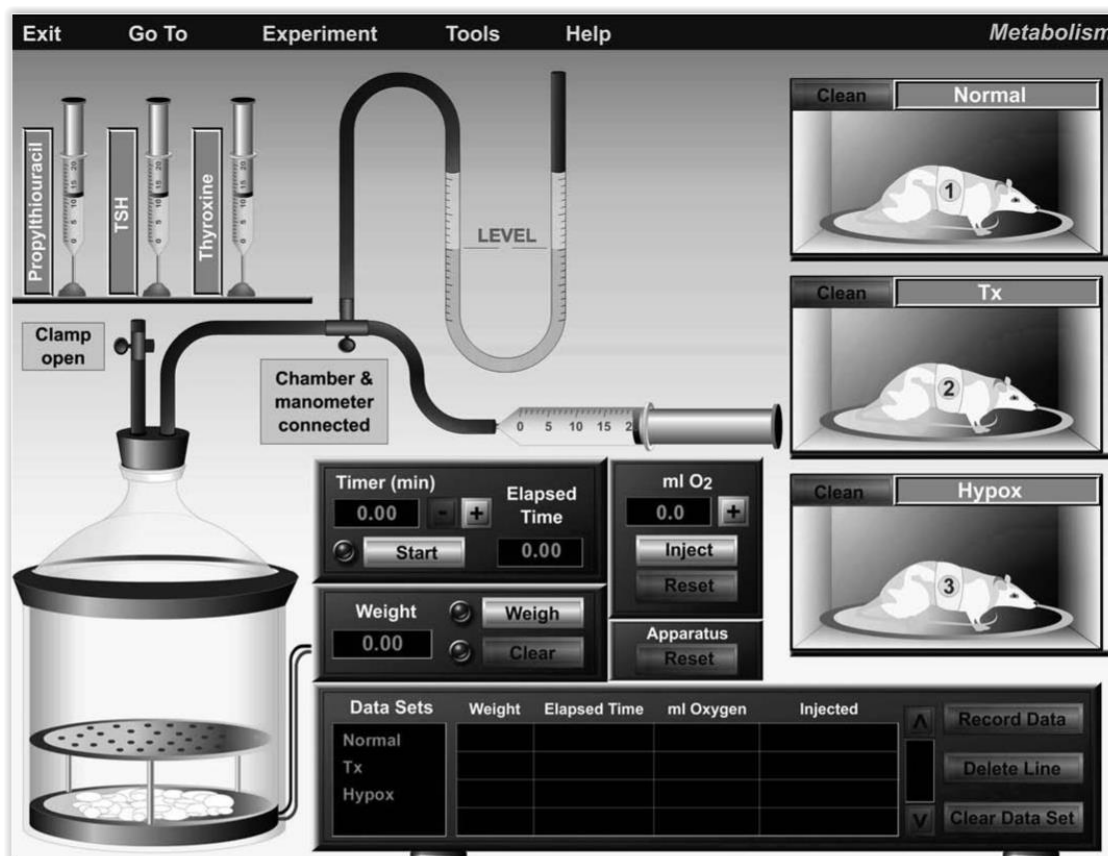
1. Mehanizmi ćelijskog transporta i permeabilnost,
2. Fiziologija skeletnog sistema,
3. Neurofiziologija i nervni impulsi,
4. Fiziologija endokrinog sistema,
5. Kardiovaskularna dinamika,
6. Kardiovaskularna fiziologija,
7. Mehanika respiratornog sistema,
8. Procesi varenja,
9. Fiziologija bubrežnog sistema,
10. Acido-bazna ravnoteža,
11. Serološke analize,

i dodatnog materijala u vidu histološkog atlasa pojedinih pojašnjenja. Svaki modul podeljen je na nekoliko pojedinačnih eksperimenata i materijal koji studentima daje teorijsku osnovu za problem koji će se eksperimentalno obrađivati, kao i kratak upitnik koji studenti popunjavaju nakon urađenog eksperimenta.

Osvrnimo se na primer na modul Fiziologija endokrinog sistema. Osim uvodnog materijala, ovaj modul sadrži sledeće eksperimente:

1. Određivanje stope metabolizma
2. Hormonska terapija
3. Insulin i dijabetes 1
4. Insulin i dijabetes 2
5. Merenje koncentracije kortizola i adrenokortikotropnog hormona

Kako bismo ilustrovali stepen složenosti eksperimenata, pogledajmo prvi eksperiment ovog modula, “Određivanje stope metabolizma”.



Slika2. Određivanje stope metabolizma – postavka eksperimenta. Preuzeto sa: [https://media.pearsoncmg.com/bc/bc\\_physioex\\_8/sheets\\_ap/worksheet\\_ap04.pdf](https://media.pearsoncmg.com/bc/bc_physioex_8/sheets_ap/worksheet_ap04.pdf)

Ukratko, student ima na raspolaganju virtualnu mehaničku aparaturu za merenje potrošnje kiseonika, čiji način rada je objašnjen u tekstu koji prethodi eksperimentu. Takođe, ima na raspolaganju tri eksperimentalne životinje, od kojih je jedna kontrolna, druga ima uklonjenu tiroidnu žlezdu a poslednjoj je uklonjena hipofiza. Na kraju, na raspolaganju su i tri tretmana (propiltiouracil, tirostimulišući hormon i tiroksin). Koristeći sve navedeno, na osnovu teorijskog znanja sažetog u dodatnom materijalu, student ima zadatak da, mereći potrošnju kiseonika eksperimentalne životinje, objasni ulogu tiroidne žlezde i njenih hormona u održavanju stope metabolizma, kao i da pretpostavi delovanje negativne povratne sprege kao jednog od osnovnih kontrolnih mehanizama u radu endokrinih sistema. Vidimo da je za to potrebno da se student prethodno pripremi za datu eksperimentalnu vežbu i da poznaje fiziološke principe funkcionisanja jedne endokrine osovine (hipofiza-tiroidna žlezda).

Takođe, mora da uoči povezanost hormona tiroidne žlezde sa stopom metabolizma. Dalje, mora da donese pretpostavku o tome kako će pojedine promene u radu delova navedene osovine delovati na metabolizam konkretne ispitivane životinje. Na kraju, njegov cilj je da tu pretpostavku testira pravilnim izborom eksperimentalne životinje i/ili tretmana i da na osnovu rezultata eksperimenta donese zaključak. Sve to iziskuje više kognitivne procese i učvršćuje prethodno stečeno teorijsko znanje. Naravno, opisani eksperiment mogao bi da se izvede i u pravoj laboratoriji, čime bi student stekao iskustvo u radu sa eksperimentalnim životinjama, kao i u izvođenju hirurških operacija koje su neophodne u opisanom slučaju. Međutim, taj eksperiment bi zahtevao laboratoriju izuzetno dobro opremljenu za hirurške intervencije (s obzirom na pomenuto uklanjanje hipofize jednog od pacova), iskusnog hirurga koji bi obučio studente za te intervencije, ceo tim pomoćnika, a ne zaboravimo ni relativno veliki broj eksperimentalnih životinja. Naime, za opisan eksperiment ne bismo mogli da koristimo samo tri životinje (kako je to prikazano u PhysioEx programskom paketu), usled njihovih individualnih razlika i neophodnih statističkih analiza koje bi nužno pratile eksperiment. Ukoliko bismo nastojali da imamo eksperimentalne grupe minimalne brojnosti, morali bismo da upotrebimo bar 72 životinje. Na kraju, to bi zahtevalo i mnogo vremena.

<b>CHART 1</b> <b>Effects of Hormones on Metabolic Rate</b>			
	<b>Normal rat</b>	<b>Thyroidectomized rat</b>	<b>Hypophysectomized rat</b>
<b>Baseline</b>			
Weight	_____ grams	_____ grams	_____ grams
ml O <sub>2</sub> used in 1 minute	_____ ml	_____ ml	_____ ml
ml O <sub>2</sub> used per hour	_____ ml	_____ ml	_____ ml
Metabolic rate	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr
<b>With thyroxine</b>			
Weight	_____ grams	_____ grams	_____ grams
ml O <sub>2</sub> used in 1 minute	_____ ml	_____ ml	_____ ml
ml O <sub>2</sub> used per hour	_____ ml	_____ ml	_____ ml
Metabolic rate	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr
<b>With TSH</b>			
Weight	_____ grams	_____ grams	_____ grams
ml O <sub>2</sub> used in 1 minute	_____ ml	_____ ml	_____ ml
ml O <sub>2</sub> used per hour	_____ ml	_____ ml	_____ ml
Metabolic rate	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr
<b>With propylthiouracil</b>			
Weight	_____ grams	_____ grams	_____ grams
ml O <sub>2</sub> used in 1 minute	_____ ml	_____ ml	_____ ml
ml O <sub>2</sub> used per hour	_____ ml	_____ ml	_____ ml
Metabolic rate	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr	_____ ml O <sub>2</sub> /kg/hr

Slika 3. Određivanje stope metabolizma – prikaz rezultata. Preuzeto sa:

[https://media.pearsoncmg.com/bc/bc\\_physioex\\_8/sheets\\_ap/worksheet\\_ap04.pdf](https://media.pearsoncmg.com/bc/bc_physioex_8/sheets_ap/worksheet_ap04.pdf)

Kako je veza između opisanih eksperimentalnih grupa, tretmana i stope metabolizma dobro poznata, bilo je moguće osmisлити programsku simulaciju eksperimenta koja dovoljno dobro naglašava rezultate realnih eksperimenata. Do tih rezultata se dolazi brzo a zaključci su pouzdani i usmeravaju

studenta na ispravne zaključke. Sve to čini opisani softver idealnim rešenjem za dodatak nastavi biologije. Šta više, dodatni materijal u vidu tabele u koju studenti upisuju rezultate eksperimenta i kratkog upitnika vodi studenta ka zacrtanom cilju i uči ih sistematičnom pristupu radu u laboratoriji.

Tokom prethodnih desetak godina pokazano je da je studentima rad u opisanom programskom paketu zanimljiv i da uveliko doprinosi ostvarenju ciljeva nastave iz fiziologije/endokrinologije. Štaviše, testirali smo upotrebu ovog softvera i u radu sa učenicima srednjih škola a rezultati su bili veoma ohrabrujući. Učenici su brzo, aktivno i samostalno savladavali postavljene probleme, uz usmeravanje koje je sprovodio nastavnik. Tako smo došli do zaključka da je upotreba PhysioEx programskog paketa od velike koristi u nastavi koju sprovodimo te nas stimuliše da potražimo i druga rešenja iz oblasti upotrebe informacionih tehnologija i time ostvarimo još proaktivniji pristup ispunjavanju zadatih nastavnih ciljeva.

## Osvrt na doprinos TeComp projekta modernizaciji nastave

Osim ranije opisanih interaktivnih virtualnih rešenja koja se već koriste u nastavnom procesu na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, veliki doprinos modernizaciji nastave omogućilo je učešće u realizaciji projekta iz grupe Erasmus+ programa, "Poboljšanje nastave u prirodnim i matematičkim naukama u visokom obrazovanju (TeComp)", čije kofinansiranje je obezbedila EACEA. Naime, tokom trajanja projekta, do sada smo mogli da čujemo kako ovom problemu pristupaju kolege iz visokoškolskih ustanova iz Španije, Slovačke, Češke, Belgije i Albanije. Među ponuđenim rešenjima brojna su ona koja nalaze primenu i u nastavi biologije te se neka već koriste u redovnoj nastavi Biološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu. To se naročito odnosi na znanja koja smo do sada imali prilike da steknemo učešćem u radionici "Professional Development in Educational Interaction and Communication", koju organizuje i sprovodi Univerzitet u Gentu. Kao rezultat toga, na kursovima Biološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu u koje su neposredno uključeni autori ovog teksta, već se u redovnoj nastavi koriste preporuke usvojene u vezi tema poput postera, diskusije i kolaboracije, animacija, ... Reakcije studenata su pozitivne a uočava se i napredak u ispunjavanju nastavnih ciljeva. Time je već ostvarena korist od učešća u TeComp projektu i ispunjen je jedan od njegovih ciljeva tj. unapređen je kvalitet nastave biologije na Biološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. To je dobar početak a neophodno je da stečena znanja i veštine podelimo sa kolegama koji su spremni da ulože lični trud i vreme kako bi osavremenili svoj pristup nastavi i učinili ga interaktivnijim, zanimljivijim i metodološki bogatijim.

## Literatura

- PhysioEX Exercise 4, Endocrine System Physiology* [Online]. Pearson. Available: [https://media.pearsoncmg.com/bc/bc\\_physioex\\_8/sheets\\_ap/worksheet\\_ap04.pdf](https://media.pearsoncmg.com/bc/bc_physioex_8/sheets_ap/worksheet_ap04.pdf) [Accessed 27.4. 2021].
- AKINOGLU, O. & TANDOGAN, R. Ö. 2007. The Effects of Problem-Based Active Learning in Science Education on Students' Academic Achievement, Attitude and Concept Learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3, 71-81.
- ASYARI, M., AL MUHDHAR, M. H. I. & IBROHIM, S. H. 2016. Improving critical thinking skills through the integration of problem based learning and group investigation. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 5, 36-44.

- BRUNDTLAND, G. H. 1987. United Nations. Report of the World Commission on Environment and Development: Our Common Future.
- DORTEL, E., PECQUERIE, L. & CHASSOT, E. 2020. A Dynamic Energy Budget simulation approach to investigate the eco-physiological factors behind the two-stanza growth of yellowfin tuna (*Thunnus albacares*). *Ecological Modelling*, 473, 109297.
- DRIVER, R., NEWTON, P. & OSBORNE, J. 2000. Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education*, 84, 287-312.
- GRANT, R. 1997. A claim for the case method in the teaching of geography. *Journal of Geography in Higher Education*, 21, 171-185.
- JERONEN, E., PALMBERG, I. & YLI-PANULA, E. 2017. Teaching Methods in Biology Education and Sustainability Education Including Outdoor Education for Promoting Sustainability—A Literature Review. *Education sciences*, 7.
- KARAMI, M., PAKMEHR, H. & AGHILI, A. 2012. Another view to importance of teaching methods in curriculum: collaborative learning and students' critical thinking disposition. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 46, 3266-3270.
- KATZ, S., HOLLINGSWORTH, R. G., BLACKBURN, J. G. & CARTER JR, H. T. 1978. Use of computer simulation in teaching physiology: Student laboratory. *Computers & Education*, 2, 307-318.
- KERN, E. & CARPENTER, J. 1986. Effect of field activities on student learning. *The Journal of General Education*, 34, 180-183.
- KESELMAN, A. 2003. Supporting inquiry learning by promoting normative understanding of multivariable causality. *Journal of Research in Science Teaching*, 40, 898-921.
- PRINCE, M. J. & FELDER, R. M. 2006. Inductive teaching and learning methods: Definitions, comparisons and research basis. *Journal of Engineering Education*, 95, 123-138.
- REHAN, R., AHMED, K., KHAN, H. & REHMAN, R. 2016. A way forward for teaching and learning of Physiology: Students' perception of the effectiveness of teaching methodologies. *Pak J Med Sci*, 32, 1468-1473.
- SANTHAKUMARI NAGOTHU, R., YOGANANDA REDDY INDLA, Y. & PALURU, R. 2016. Effective physiology teaching methods: from the perspective of first year MBBS students. *Indian J Clin Anat Physiol*, 3, 336-338.
- SIMMONS, M., WU, X., KNIGHT, S. & LOPEZ, R. 2008. Assessing the influence of field- and GIS-based inquiry on student attitude and conceptual knowledge in an undergraduate ecology lab. *CBE—Life Sciences Education*, 7, 338-345.
- SRI NAGESWARI, K., MALHOTRA, A., KAPOOR, N. & KAUR, G. 2004. Pedagogical effectiveness of innovative teaching methods initiated at the Department of Physiology, Government Medical College, Chandigarh. *Adv Physiol Educ*, 28, 51-58.
- VESELINOVSKA, S., GUDEVA, L. & DJOKIC, M. 2011. Applying appropriate methods for teaching cell biology. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2837-2842.
- VUJOVIC, P. 2016. Improving teaching skills: from interactive classroom to applicable knowledge. *Adv Physiol Educ*, 40, 1-4.
- ZAO, P., STABLER, T. & PETERSON, G. 2005. *PhysioEx 5.0: Laboratory Simulations In Physiology CD-ROM Version*. Pearson.

**Autori:**  
**Tatjana Anđelković**  
**Ivana Kostić**



**Udaljeni pristup  
analitičkim instrumentima  
u realizaciji visokoškolske  
nastave hemije – od ideje  
do implementacije**

**PITANJA:**

Šta čini sesiju udaljenog pristupa analitičkom instrumentu?

Kako povezati analitičke instrumente i učiniti ih dostupnim za udaljeni pristup?

Koje su tehnički preduslovi za primenu udaljenog pristupa?

Kako adekvatno pedagoški i metodički pripremiti sesiju udaljenog pristupa?

Kako koristiti NETCHEM platformu za udaljeni pristup analitičkim instrumentima?

Kako izgleda metodički scenario časa sa udaljenim pristupom analitičkom instrumentu – jonskom hromatografu?



## Sadržaj

Uvod.....	80
Šta čini sesiju udaljenog pristupa analitičkom instrumentu? .....	80
Kako povezati analitičke instrumente i učiniti ih dostupnim za udaljeni pristup?.....	82
Koji su tehnički preduslovi za primenu udaljenog pristupa? .....	82
Oprema laboratorije za udaljeni pristup.....	83
Oprema učionice za udaljeni pristup.....	83
Kako adekvatno pedagoški i metodički pripremiti sesiju udaljenog pristupa? .....	84
Kako koristiti netchem platformu za udaljeni pristup analitičkim instrumentima? .....	85
Kako izgleda metodički scenario časa sa udaljenim pristupom analitičkom instrumentu – jonskom hromatografu?.....	88
Potrebna oprema .....	89
Početak komunikacije .....	89
Dalji tok komunikacije.....	90
Literatura.....	91

## Uvod

Smernice za primenu udaljenog pristupa analitičkim instrumentima u realizaciji visokoškolske nastave hemije, koje su prezentovane u ovom materijalu, razvijene su tokom implementacije Erasmus+ projekta NETCHEM (2016-2020).

Cilj ovog materijala je da se korisniku ove tehnike podučavanja i učenja (pojedincu ili instituciji) predoče neke najvažnije odrednice organizacije efikasnog časa na kome se kao nastavna metoda koristi udaljeni pristup analitičkim instrumentima.

Izložene smernice ne treba shvatiti kao najbolji i jedini pristup ovakvom tipu učenja/podučavanja. Ideja je da se postavljanjem ovih smernica ukaže na moguće probleme, nedostatke i prednosti ovog tipa nastave, uz sugestiju da je uvek važno da sam korisnik ove nastave prilagodi svojim potrebama i tehničkim kapacitetima kojima raspolaže, način na koji će realizovati ovakav tip nastave, odnosno primeniti prezentovane smernice. Stoga, ove smernice treba sagledati više u konceptu postavljanja opšte strategije implementacije udaljenog pristupa analitičkim instrumentima u okviru inter- ili intra-institucionalne nastave. Naravno, mogućnost pristupa i primene razvijene NETCHEM platforme u ovu svrhu učenja/podučavanja ponuđena je (i preporučena) kao jedna od mogućih opcija implementacije udaljenog pristupa u nastavi hemije.

## Šta čini sesiju udaljenog pristupa analitičkom instrumentu?

Daljinski dostupni analitički instrumenti omogućavaju studentima, nastavnicima ali i istraživačima da pristupe instrumentu i kontrolišu analizu koju vrše na ovim instrumentima sa neke druge udaljene lokacije, iz neke druge laboratorije, iz učionice ili čak od kuće. Na ovaj način se smanjuje

barijera koja postoji usled nemogućnosti fizičkog pristupa studenta i nastavnika instrumentu, a sa ciljem da se izvede autentična i realistična obrazovna aktivnost.

Budući da gotovo sve savremene hemijske laboratorije instrumentalne analize danas koriste instrumente kojima se upravlja preko računarskog interfejsa, daljinsko upravljanje instrumentacijom nije samo relativno jednostavno izvesti, već višestruko diže nivo edukacije studenta u razumevanju principa kao i u savladavanju tehnike rada na instrumentima, odnosno student je stavljen u realnu istraživačku i problemsku situaciju.

Laboratorijske vežbe i eksperimenti sačinjavaju suštinski deo svakog studijskog programa hemije, biologije i fizike. Za realizaciju ovog praktičnog dela nastave, od važnosti je mogućnost korišćenja instrumenata i uređaja direktno od strane studenta. Primenom „rada na daljinu“ u laboratorijskom delu kurseva hemije, biologije i fizike omogućava se pristup eksperimentima na instrumentima i uređajima kojima institucija ne raspolaže u datom trenutku. Takođe, na ovaj način studenti, nastavnici, istraživači mogu da rade na složenijim i skupljim instrumentima koji se često kontrolišu specijalizovanim i licenciranim softverom i upravljačkim programima, a koji se ne mogu lako instalirati na udaljenoj strani korisnika.

Uzimajući u obzir činjenicu da postoji veliki broj različitih metodičkih scenarija u ostvarivanju daljinskog pristupa analitičkim instrumentima, potrebno je definisati termine u pojašnjavanju ove nastavne metode učenja i podučavanja.

Svaka komunikacija koja se ostvaruje između laboratorije sa analitičkim instrumentom sa jedne strane i korisnika (edukator, student, istraživač) sa druge strane putem internet interakcije i uređaja (računar, laptop, tablet i mobilni telefon) se naziva **sesija udaljenog pristupa analitičkom instrumentu**.

U sesiji učestvuju dve strane:

**strana domaćina sesije**, koja je definisana kao računar koji **poziva** druge korisnike da se pridruže sesiji i

**strana gosta sesije**, koja je definisana kao računar koji se **pridružuje** pozivu na sesiju. Takođe, sesija udaljenog pristupa analitičkom instrumentu uključuje dve ključne strane:

**laboratoriju za udaljeni pristup** (laboratorija u kojoj se nalazi analitički instrument) i

**učionicu za udaljeni pristup** (mesto za kojim radi korisnik koji udaljeno pristupa instrumentu).

Sesija udaljenog pristupa analitičkom instrumentu predstavlja korak dalje od računarsko generisanih laboratorijskih simulacija. Ona predstavlja alternativu radu u pravoj laboratoriji.

Udaljene nastavne laboratorije se mogu koristiti na četiri načina:

1. za demonstraciju i zapažanje eksperimenta;
2. za sprovođenje merenja (posebno u realnom vremenu);
3. za manipulisanje instrumentima u eksperimentima;
4. za saradnju na daljinu.

**Demonstracija**, odnosno zapažanje eksperimenta na daljinu daleko je najjednostavnija i najsnažnija verzija daljinskog eksperimenta. Obično je interakcija posmatrača sa „udaljenim

predavačem“ minimalna i često je ograničena na kontrolu na primer kamere (kontrola astronomske kamere ili elektronskog mikroskopa).

**Merenje.** Primeri direktnog merenja i praćenja rezultata u realnom vremenu su merenje kinetike reakcije u hemiji, eksperimenti toplotne provodljivosti, hemijska analiza pomoću gasne/tečne hromatografije ili merenje kristalne difrakcije kristala, rentgenstrukturalna analiza kristala.

**Manipulacija.** Pored posmatranja i merenja, neki daljinski eksperimenti zahtevaju i stvarnu fizičku kontrolu. To bi mogla biti kontrola elektromotora ili više interaktivnih operacija, poput podešavanja nekih parametara analize i instrumenta.

**Saradnja.** Svakako, jedna od prednosti interneta je ta što on može olakšati deljenje ne samo eksperimenata i instrumenata, već i podataka. Na ovaj način interaktivna saradnja posmatrača i predavača pruža bolju realizaciju eksperimenta.

## Kako povezati analitičke instrumente i učiniti ih dostupnim za udaljeni pristup?

Instrument koji se koristi u udaljenom pristupu podrazumeva se da poseduju LAN (*local area network*) ili WAN (*wide area network*) konekciju. Za realizaciju ovakve nastavne aktivnosti potrebna je prethodna adekvatna organizacija i priprema časa, koja podrazumeva angažovanje ne samo nastavnika i studenta, već i tehničara zaduženog za rad na instrumentu, kao i IT stručnjaka. Upravo iz razloga složenosti organizacije ove nastave, kao i potrebe poznavanja rada na instrumentima koji su često kompleksni i sofisticirani, ova nastavna metoda se češće koristi u praksi u okviru visokoškolskog obrazovanja ili u okviru celoživotnog obrazovanja, odnosno kontinualnog profesionalnog usavršavanja stručnjaka u oblasti hemijske detekcije i analize uzoraka. Činjenica da ova metoda rada pored primene u istraživačkom aspektu, ima primenu u nastavi, pokazuje potrebu za uvođenjem odgovarajućeg pedagoškog i metodičkog aspekta u pripremi i primeni daljinskog pristupa instrumentima.

Kao primer instrumenata koji se mogu uspešno primeniti u sesijama za udaljeni pristup su instrumenti koji su i inače dostupni na NETCHEM platformi, koja pruža mogućnost povezivanja sa instrumentima u okviru sledećih instrumentalnih tehnika: UV-VIS spektrofotometrija, atomska apsorpciona spektrometrija, gasna i tečna hromatografija, masena spektrometrija, termo-gravimetrijska analiza. Tako na primer, *on-line* interpretacija hromatograma, spektralnih podataka, identifikacija jedinjenja pomoću masene spektrometrije, baze podataka i fragmentacionih obrazaca samo su par primera u kojima student hemije može imati veliku korist.

## Koji su tehnički preduslovi za primenu udaljenog pristupa?

Neke osnovne karakteristike u pogledu tehničkih zahteva za uspešnu sesiju daljinskog pristupa su:

- instrumentalna analitička oprema,
- audio/video oprema postavljena u laboratoriji za udaljeni pristup,
- audio/video oprema postavljena u učionici za udaljeni pristup,
- softverski zahtevi,

veze i signali.

Osnovni elementi koje treba obezbediti su: računari sa pristupom za instaliranje aplikacija i softvera, brzi pristup internetu, zvučnici, mikrofoni, video projektor (za više gledalaca), softver za prenos glasa putem interneta (preferira se Skipe, Team Viewer). Preduslov za uspešnu implementaciju ovih smernica je poznavanje korišćenja TeamViewer i/ili Skype for business.

Primer potrebne opreme koja se koristi za učenje na daljinu u nastavnom planu i programu hemije je prema planu projekta NETCHEM:

## Oprema laboratorije za udaljeni pristup

Analitički instrument dostupan za udaljeni pristup,

Software TeamViewer i/ili Skype for business,

Lan Network: ruteri (Router 10 Gbs fiber optics + 25 PORT LAN Allied Telesis AT-GS924MX-50, Gigabit Ethernet Managed switch with 24 ports 10/100/1000T Mbps, 2 SFP/Copper combo ports, 2 SFP/SFP+ uplink slots, single fixed AC power supply; WI-FI Router 802.11 ac standard, D-Link DIR-809, AC750 Dual-Band),

Stabilizator kamere (DJI Osmo Mobile 3-Axis Handheld Stabilizer for Phone Camera (drivers for Android & iPhone),

Reflektor sa LED rasvetom (max. height 200 cm, two LED reflectors).

## Oprema učionice za udaljeni pristup

PC Monitor (Display diagonal 21,5 – 22" Res. FULL HD 1920×1080, ports: HDMI/DVI, with HDMI/DVI cable),

PC desktop (Intel CPU LGA1151 Intel® Celeron® Dual-Core G3900, 2.8GHz BOX 14nm; AMD 'APU FM2 AMD A6-6400K, 3.9GHz/ Radeon™ HD 8470D or better GIGABYTE MB - SOCKET 1151 - GA-H110N, 8GB RAM, 256 GB SSD, USB 3.0, LAN, Audio, USB 2.0, HDMI & DVI, mini ITX case, 56×220×200 mm),

Multi-device tastatura i miš (Wireless Bluetooth, Keyboard LOGITECH K780, K480, K380, Mouse LOGITECH Thriatlon),

PC slušalice (WIRED: MICROSOFT LifeChat LX-3000, USB 2.0; WIRELESS: Bluetooth connection, on-ear or over-ear, with microphone, foldable, Near Field Communication (NFC)),

WEB kamere (720p – Logitech C270; HD 720p middle class, USB compatible with Skype and Win 10; 1080p Full HD – Logitech C922 Pro stream USB, HD Web camera higher class Full HD 1080p at 30 fps & 720p at 60 fps st compatible with Skype and Win 10),

Konvertibilni laptop (2-in-1) Microsoft Surface Pro 12.3 i5 8Gb 256GB Multi-Touch Tablet 2017 Model (12.3" 10-Point Touch Display, 2736 × 1824 Screen Resolution, Windows 10 pro, USB 3.0, Mini DisplayPort, microSD Slot, 2.6 GHz Intel Core i5-7300U (Dual-Core) Weight < 1 kg, Keyboard + pen; Var 1: 8 GB, 256 GB SSD; Var 2: 4 GB, 128 GB SSD),

LCD TV 55" (Display diagonal 55" Full HD 1920×1080, USB, HDMI),

Screen for Video beam – projector (Diagonal min. 250 cm),

Wireless display Adapter MIRACAST (Microsoft) Wi-Fi CERTIFIED™ Miracast® technology, USB/HDMI, remote connection with a 23-foot range or more, Adapter length: 103.5×22×11 mm, USB extension cable: 159 mm,

Presentation pointer (Logitech Spotlight presentation remote MS PowerPoint, Win 10; Spotlight connects instantly via USB receiver or Bluetooth®. It's plug-and-play on most platforms and compatible with all popular presentation apps. Plus, it's fully rechargeable and boasts a 100-foot operating range.

## Kako adekvatno pedagoški i metodički pripremiti sesiju udaljenog pristupa?

Evo nekoliko osnovnih karakteristika koje treba uzeti u obzir pri definisanju tipa pedagoško-metodičkih scenarija sesija udaljenog pristupa:

- A. Koja je svrha udaljenog pristupa?
  - a. Obrazovna - jedna strana obučava drugu,
  - b. Konsultativna ili istraživačka - obe strane imaju uporedive veštine i znanja,
  - c. Udaljena strana.
- B. Koje su glavne karakteristike grupe koja uči:
  - a. Koji je nivo znanja grupe?
  - b. Koja je veličina grupe?
  - c. Koji je broj grupa (paralelno)?
- C. Koji je tip razmene informacija?
  - a. Grupa je dominantno prijemčiva,
  - b. Grupa je dominantno interaktivna.
- D. Koja vrsta interaktivnosti se postiže?
  - a. Interakcija pojedinačnog monitora / softvera
    - (A) samo sa instrumentom -Tim gledaocu, predavanje je licem u lice;
    - (B) ili samo Skype - nikakva interakcija sa instrumentom (samo audio video veza između učesnika)
  - b. Dvostruka interakcija monitora i softvera (sa instrumentom i web konferencija).

Da bi se obezbedila bolja klasifikacija mogućih scenarija daljinskog pristupa, u Tabeli 1. su sumirane neke osnovne karakteristike sesija udaljenog pristupa.

Postoji mnogo različitih pedagoških/metodičkih scenarija u kojima se daljinski pristup može ostvariti. Tako na primer, jedan od scenarija je demonstracija rada analitičkog instrumenata putem softvera za video konferenciju u realnom vremenu, pri čemu se komunikacija ostvaruje između analitičara-edukatora i studenata koji se nalaze na udaljenoj lokaciji od instrumenta. Ili scenario u kome student može da ima daljinsku kontrolu nad instrumentom ili scenario koji predviđa i demonstraciju rada instrumenta ali i udaljenu kontrolu od strane studenta, ili scenario u kome se samo pokazuje instrument ili njegovi delovi. Takođe i sama realizacija nastave može znatno da varira u zavisnosti od toga kakva se IT oprema koristi, kamere, slušalice, mikrofon ili opcija video konferencijskog povezivanja.

Takođe, nastavnik može izabrati da pošalje svoje uzorke na analizu u neku od institucija udaljenog pristupa da bi se baš ti uzorci analizirali ili mogu koristiti ponuđene uzorke od strane

institucije domaćina (institucija u kojoj je fizički lociran analitički instrument). Da bi se uspešno realizovao ovakav čas ili u širem smislu sesija udaljenog pristupa, potrebno je sagledati sledeće korake: kontaktirati instituciju domaćina radi dogovora u vezi tipa instrumenta; navesti dan i vreme realizacije test sesije i finalne sesije koja bi uključivala i studente; poslati svoj uzorak za analizu ili potvrditi korišćenje uzorka koji predlaže institucija domaćin; obezbediti prisustvo edukatora za realizaciju i vođenje časa i tehničara koji je u instituciji domaćinu i koji vrši samu hemijsku analizu na instrument.

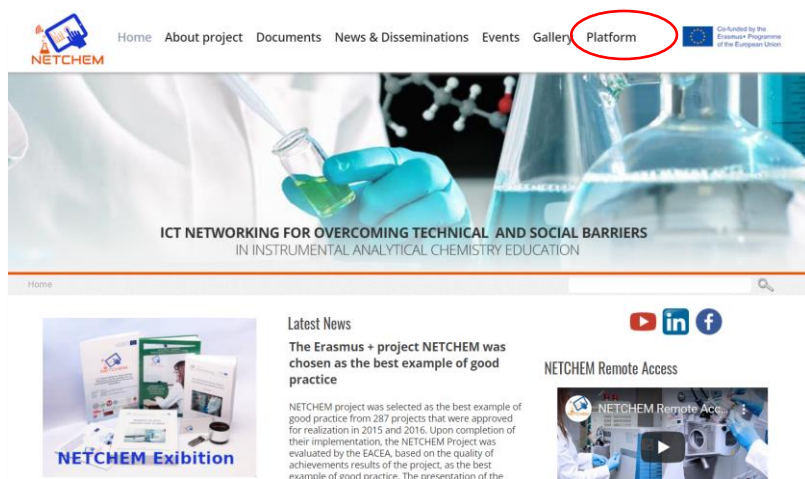
Tabela 1. Karakteristike sesije udaljenog pristupa analitičkom instrumentu

Strane koje učestvuju u sesiji udaljenog pristupa analitičkom instrumentu		
strana domaćina sesije		PC instrumenta u laboratoriji ili PC korisnika
strana gosta sesije		PC instrumenta u laboratoriji ili PC korisnika
Softwear za povezivanje		
Team Viewer	Sastanak:	Da/Ne
	Udaljena kontrola instrumenta:	Da/Ne
	Sastanak i udaljena kontrola istovremeno:	Da/Ne
Skype	Poziv 1:1	Da/Ne
	Konferencijski poziv	Da/Ne
Communication hardware		
on host side		
on guest side		
Vrsta razmenjene informacije:		
1. Obrazovna (jedna strana sesije je dominantno receptivna):		Da/Ne
Edukator je na strani:		Domaćina sesije/Gosta sesije
Broj edukatora:		
Student je na strani:		Domaćina sesije/Gosta sesije
Broj studenata:		
2. Konsultativna (obe strane sesije su jednako zastupljene u pružanju I primanju informacija):		Da/Ne
Broj učesnika na strani domaćina sesije:		
Broj učesnika na strani gosta sesije:		

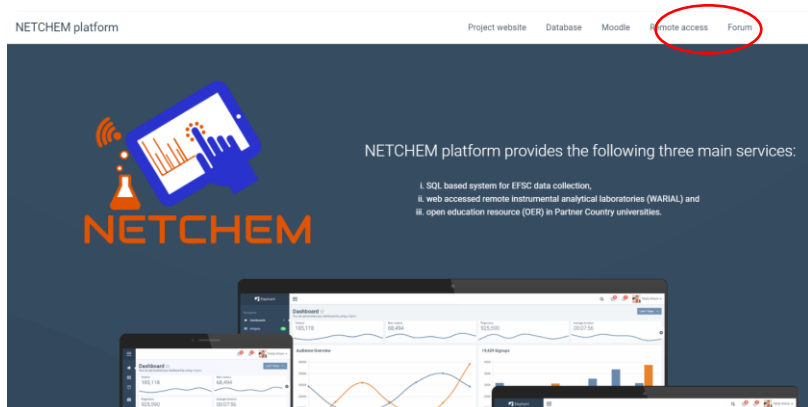
## Kako koristiti netchem platformu za udaljeni pristup analitičkim instrumentima?

- Otvoriti sajt NETCHEM projekta na adresi [www.netchem.ni.ac.rs](http://www.netchem.ni.ac.rs) i odabrati opciju **Platform** u glavnom meniju (slika 1). Takođe, NETCHEM platformu možete otvoriti i direktno pomoću internet adrese <http://netchem-eu.com/home.html>
- Nakon otvaranja platforme, odabrati opciju **Remote Access** u glavnom meniju platforme (slika 2).
- Odabirom prethodne opcije otvara se stranica sa pregledom institucija, kao i instrumenata u okviru institucija koji su dostupni za udaljeni pristup (slika 3). Takođe, na ovoj stranici su dostupna uputstva za izvođenje laboratorijskih vežbi, dodatni edukacioni materijali, kao opcija za zahtev za sesiju udaljenog pristupa. Na ovoj stranici se nalaze i imena i mejl adrese kontakt osoba za izvođenje sesije udaljenog pristupa za svaku instituciju. Kao primer dati su instrumenti dostupni u okviru Univerziteta u Nišu (slika 4).

4. Nakon odabira institucije i instrumenta neophodno je popuniti zahtev za sesiju udaljenog pristupa (Remote Session Request). Nakon odabira Remote Session Request opcije, otvoriće se Remote Access Request formular (slika 5). Prvi deo formulara zahteva popunjavanje određenih ličnih podataka, kao što su ime, prezime, mejl adresa, institucija, adresa, telefon i država.
5. Drugi deo formulara zahteva popunjavanje detalja vezanih za sesiju udaljenog pristupa, kao što su institucija u okviru koje se nalazi instrument, vrsta institucije i okviran broj učesnika koji će pratiti sesiju (slika 6). Takođe, neophodno je da popunite datum i vreme prve i druge probne sesije, kao i datum i vreme glavne sesije. Na kraju je potrebno proceniti vreme koliko bi okvirno trajala sesija udaljenog pristupa.
6. U okviru trećeg dela formulara neophodno je dati neke osnovne informacije o naučnoj oblasti, stepenu obrazovanja učesnika sesije, vrsti softvera koji će biti korišćen za vreme sesije (*TeamViewer* ili *Skype*), kao i o uzorku koji će biti analiziran (slika 7).
7. Nakon popunjavanja formulara, u cilju zaštite od zloupotrebe, neophodno je uneti kod sa slike u odgovarajuće polje.
8. Ukoliko je ispravno popunjen formular, poslednji korak je slanje zahteva klikom na dugme „Submit”.
9. Nakon svih koraka korisnik će primiti *e-mail* sa svim detaljima koje je uneo u formular, i nakon toga će sistem kontaktirati osobu zaduženu za izvođenje sesije udaljenog pristupa sa institucije kojoj je poslat zahtev. Sva dalja komunikacija između korisnika i kontakt osobe odvija se putem elektronskog mejla.



Slika 1. Opcija Platform u glavnom meniju na adresi [www.netchem.ni.ac.rs](http://www.netchem.ni.ac.rs)



Slika 2. Remote Access u glavnom meniju platforme

## Remotely Accessible Analytical Instruments

Remotely Accessible Analytical Instruments allows researchers and students to access and control their analysis out of their laboratory, in the classroom, or even at home.

NETCHEM network of remotely accessible analytical instruments lowers the barrier-to-entry and enables instructors to deliver authentic educational activities for students.

Please select a center to obtain information about available instruments in the center.

- **Partner 1** – University of Niš
- **Partner 2** – Université Pierre et Marie Curie
- **Partner 3** – University of Greenwich
- **Partner 4** – Brno University of Technology
- **Partner 5** – CEA
- **Partner 6** – University of Belgrade
- **Partner 7** – University of Novi Sad
- **Partner 8** – University of Kragujevac
- **Partner 9** – Agricultural University of Tirana
- **Partner 10** – University of Tirana
- **Partner 11** – Analysis d.o.o.
- **Partner 12** – Enološka stanica Vršac
- **Partner 13** – Zlatiborac
- **Partner 14** – AQualEER

[Remote Access Laboratory Guides](#)

[Remote Session Request](#)

[Education material usage during academic year 2018/2019](#)

Slika 3. Pregled institucija, kao i instrumenata u okviru institucija koji su dostupni za udaljeni pristup

### Partner 1 – University of Niš

#### Analytical Instruments available for remote access:

- GC-MS
- ESI-MS Decca
- ESI-MS Advantage
- HPLC + ESI-MS LTQ Orbitrap
- UV-VIS
- AAS
- Dionex Aquion Ion Chromatograph
- Stereo Microscope Leica MZ-16A with camera
- Light Microscope Leica DM 1000 with camera
- Telescope Meade LX200-ACF 8"
- Lunt LS60THA Solar Telescope

**Contact for remote session:** Darko Anđelković  
**e-mail:** darko.andjel@outlook.com

**Contact for remote session:** Tatjana Anđelković  
**e-mail:** tatjana.andjelkovic@outlook.com

#### GC-MS (Gas chromatography – mass spectrometry)

- GC: Hewlett Packard 6890 series GC System with autosampler
- MSD: Agilent 5973 Mass Selective Detector (Electron Ionization MSD-EI, single quadrupole)
- Column: HP DB5 non-polar & several others capillary columns

GC-MS is the analysis method of choice for smaller and volatile molecules such as benzenes, alcohols and aromatics, and simple molecules such as steroids, fatty acids, and hormones. It can also be applied towards the study of liquid, gaseous and solid samples.



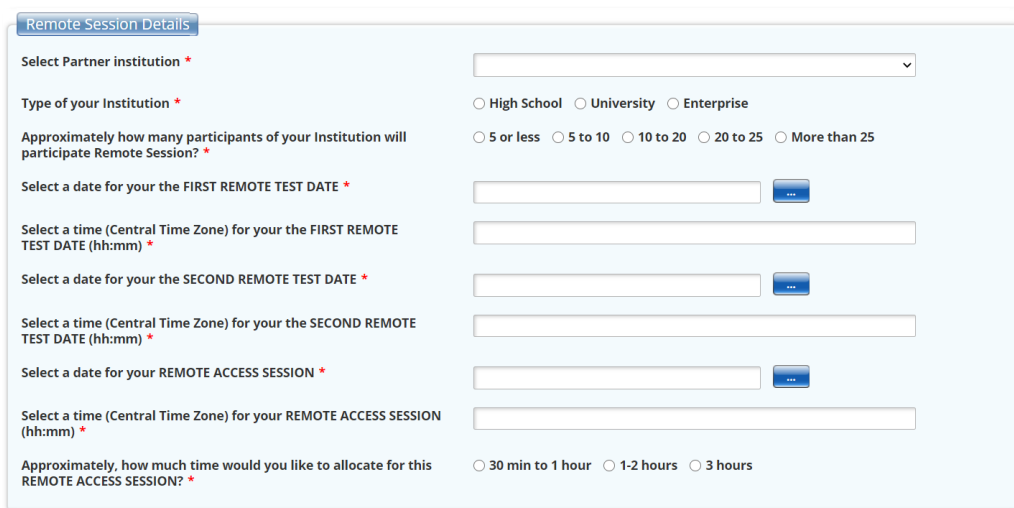
Slika 4. Analitički instrumenti dostupni u okviru Univerziteta u Nišu za udaljeni pristup

Please specify your personal information

First name *	<input type="text"/>
Last name *	<input type="text"/>
E-mail address *	<input type="text"/>
Institution *	<input type="text"/>
Phone *	<input type="text"/>
City *	<input type="text"/>
State	<input type="text"/>
Zip	<input type="text"/>
Country *	<input type="text"/>

Slika 5. Remote Access Request formular





**Remote Session Details**

Select Partner institution \*

Type of your Institution \*  High School  University  Enterprise

Approximately how many participants of your Institution will participate Remote Session? \*  5 or less  5 to 10  10 to 20  20 to 25  More than 25

Select a date for your the FIRST REMOTE TEST DATE \*

Select a time (Central Time Zone) for your the FIRST REMOTE TEST DATE (hh:mm) \*

Select a date for your the SECOND REMOTE TEST DATE \*

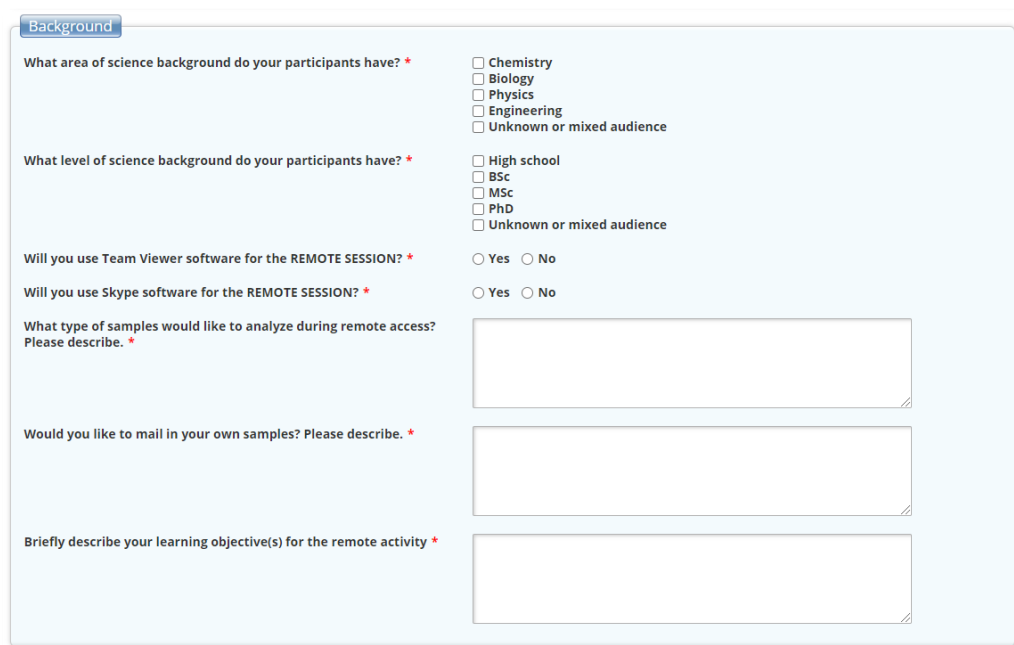
Select a time (Central Time Zone) for your the SECOND REMOTE TEST DATE (hh:mm) \*

Select a date for your REMOTE ACCESS SESSION \*

Select a time (Central Time Zone) for your REMOTE ACCESS SESSION (hh:mm) \*

Approximately, how much time would you like to allocate for this REMOTE ACCESS SESSION? \*  30 min to 1 hour  1-2 hours  3 hours

Slika 6. Detalji vezani za sesiju udaljenog pristupa, kao što su institucija u okviru koje se nalazi instrument, vrsta institucije i okviran broj učesnika koji će pratiti sesiju



**Background**

What area of science background do your participants have? \*  Chemistry  Biology  Physics  Engineering  Unknown or mixed audience

What level of science background do your participants have? \*  High school  BSc  MSc  PhD  Unknown or mixed audience

Will you use Team Viewer software for the REMOTE SESSION? \*  Yes  No

Will you use Skype software for the REMOTE SESSION? \*  Yes  No

What type of samples would like to analyze during remote access? Please describe. \*

Would you like to mail in your own samples? Please describe. \*

Briefly describe your learning objective(s) for the remote activity \*

Slika 7. Osnovne informacije o naučnoj oblasti, stepenu obrazovanja učesnika sesije, vrsti softvera koji će biti korišćen za vreme sesije (*TeamViewer* ili *Skype*), kao i o uzorku koji će biti analiziran

## Kako izgleda metodički scenario časa sa udaljenim pristupom analitičkom instrumentu – jonskom hromatografu?

Primena ovog metodičkog scenarija je pogodna u situacijama kada je potrebno da većoj grupi studenata (više od 5) bude prikazan rad nekog instrumenta, korišćenje softvera, podešavanje instrumenta ili analiza uzorka.

Prednost ove vrste pristupa se ogleda u tome da je velikoj grupi studenata omogućen uvid u rad i podešavanje instrumenta, što u laboratorijskim uslovima nije moguće, bez obzira na veličinu prostorije same laboratorije. Takođe, uzimajući u obzir veličinu monitora računara, u laboratorijskim uslovima do 5 studenata može optimalno, istovremeno i podjednako da prati podešavanja na monitoru. Pomoću ovog

metodičkog scenarija kada se studenti nalaze u istoj prostoriji, i preko projektor na platnu prate podešavanja instrumenta, svi studenti imaju podjednaku mogućnost uvida u podešavanja i sam rad instrumenta, kao i u tumačenje dobijenih rezultata. U laboratorijskim uslovima, čak i pri podeli studenata u manje grupe, nije moguće da svim studentima predavanja ili vežbe budu prezentovani na identičan način.

Nedostatak ove vrste metodičkog scenarija leži u mogućnosti postojanja problema u internet komunikaciji između računara u učionici, ili bilo kojoj prostoriji u kojoj se nalazi ciljna grupa, i računara u laboratoriji, koji je vezan za instrument. Takođe, kod analitičkih instrumenata koji zahtevaju ručno unošenje uzorka u instrument (injektiranje, ubrizgavanje, sipanje i sl.), odnosno ne poseduju *autosampler*, neophodno je da još jedna osoba (npr. tehničko lice) učestvuje u izvođenju nastave i bude prisutna u laboratoriji.

## Postupak realizacije udaljenog pristupa analitičkom instrumentu

Za realizaciju ove vrste metodičkog scenarija neophodno je posedovanje određene opreme, softvera i internet komunikacije.

### Potrebna oprema

Oprema potrebna za izvođenje udaljenog pristupa instrumentu:

- računar povezan za instrument kojim se vrši njegovo podešavanje i kontrola,
- računar u učionici (prostorija u kojoj se nalaze studenti),
- projektor,
- video bim.

Softver neophodan za realizaciju metodičkog scenarija:

*TeamViewer* program

Neophodno je da *TeamViewer* program bude instaliran i na računaru koji se nalazi u laboratoriji i pomoću koga se vrši kontrola instrumenta, i na računaru koji se nalazi u prostoriji u kojoj se nalazi ciljna grupa studenata i preko koga se vrši prezentacija rada instrumenta i tumačenje dobijenih rezultata.

Pored navedene opreme i softvera neophodno je prisustvo internet konekcije između računara u laboratoriji i prostoriji u kojoj se nalaze predavač i studenti.

### Početak komunikacije

Ciljna grupa su studenti koji se nalaze u učionici zajedno sa predavačem.

Instrument se nalazi u laboratoriji, i u zavisnosti od vrste instrumenta i načina analize uzoraka ili podešavanja, može biti potrebno da još jedna osoba bude prisutna u laboratoriji.

Ukoliko predavač ima već u svojoj listi u okviru *TeamViewer*-a povezan računar kome želi da pristupi, nije potrebno da pomoćna osoba bude prisutna u laboratoriji.

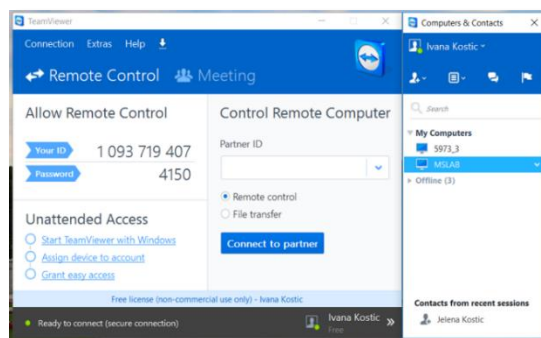
Ukoliko predavač nema u svojoj listi u okviru *TeamViewer*-a povezan računar kome želi da pristupi, neophodno je da pomoćna osoba bude prisutna u laboratoriji i da preko određene konekcije

(telefon, skype, itd.) javi parametre za pristupanje računaru, ili da predavač već ima tražene informacije (parametre).

### Dalji tok komunikacije

Predavač pristupa *TeamViewer* programu na računaru. Ukoliko ima svoj nalog, direktno se povezuje sa računalom u laboratoriji.

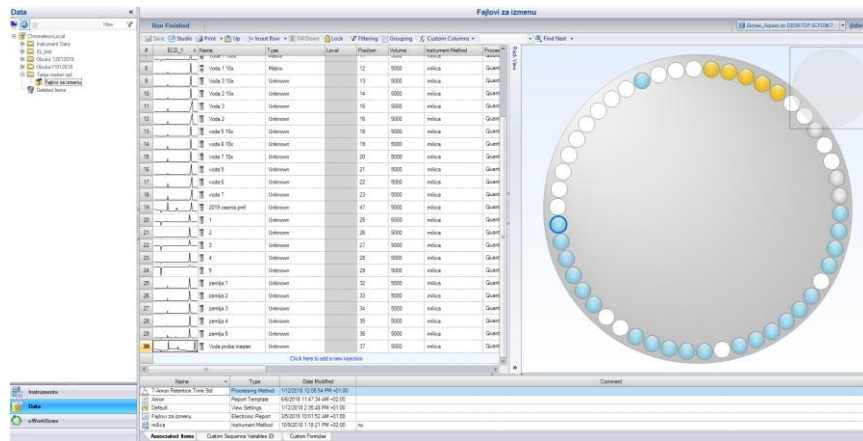
Ukoliko nema svoj nalog ili nema željeni računar u okviru svoje liste, kontaktira pomoćnu osobu u laboratoriji za neophodne podatke (ID i lozinka) kojim omogućava pristup (Slika 8.)



Slika 8. Pristup *TeamViewer*-u

Takođe, postoji i mogućnost da predavač prethodno nabavi tražene parametre i da tako pristupi računaru povezanom za instrument.

Nakon uspešno obavljenog pristupa, na monitoru računara, koji se nalazi u prostoriji sa studentima, pojaviće se ista slika kao i na monitoru računara koji je povezan za instrument (Slika 9.)



Slika 9. Izgled monitora računara za kontrolu IC instrumenta

Nakon pristupa instrumentu, svi studenti u prostoriji mogu da prate podešavanja i pregled dobijenih rezultata analize.

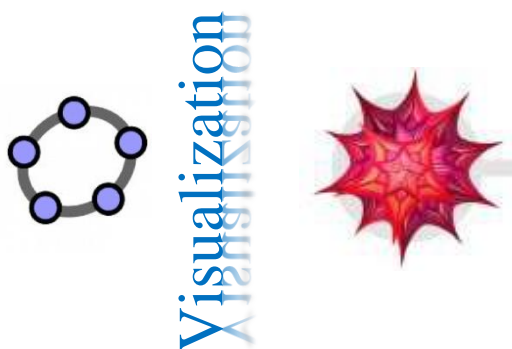
### Ishod primenjenog metodičkog scenarija

Nakon održanog časa svi studenti u prostoriji su bili u jednakoj mogućnosti da prate podešavanja i analizu uzorka na instrumentu. Ovaj metodički scenario je pogodan za izvođenje demonstracionih laboratorijskih vežbi, kada je neophodno da studenti savladaju određene praktične veštine rukovanja određenim instrumentom.

## Literatura

1. Guidelines for courses publishing by WARIAL networking, <http://www.netchem.ac.rs/documents?task=download.send&id=1701&catid=324&m=0>
2. Linda R. Phipps, Creating and Teaching a Web-Based, University-Level Introductory Chemistry Course That Incorporates Laboratory Exercises and Active Learning Pedagogies, *J. Chem. Educ.* 2013, 90, 568–573
3. Baran, J.; Currie, R.; Kennepohl, D. Remote Instrumentation for the Teaching Laboratory. *J. Chem. Educ.* 2004, 81, 1814–1816.
4. Dietmar Kennepohl and Lawton Shaw, *Accessible Elements Teaching Science Online and at a Distance*, AU Press, Athabasca University, 2010.

**Autor:**  
**Goran Radojev**



## **Vizuelizacija problema pomoću softvera GeoGebra i Wolfram Mathematica**

PITANJA:

Kako uz pomoć GeoGebre vizuelizovati razne matematičke probleme?

Kako u programskom paketu Wolfram Mathematica napisati programe koji će animirati kompleksne matematičke probleme?

Da li pomoću GeoGebre i Wolfram Mathematica, studenti mogu lakše da razumeju i obrade složenije matematičke pojmove i postupke?

## Sadržaj

<u>Uvod</u> .....	93
<u>1</u> <u>GeoGebra</u> .....	94
<u>2</u> <u>Wolfram Mathematica</u> .....	97
<u>3</u> <u>Primena softvera GeoGebra i Mathematica u vizuelizaciju nekih složenijih problema</u> .....	99
<u>Literatura</u> .....	1066

## Uvod

Ovaj tekst zamišljen je kao pomoć nastavnicima, koji žele da koriste softvere GeoGebra i Wolfram Mathematica, u cilju unapređenja nastavnog procesa, bez obzira da li je reč o klasičnoj ili onlajn nastavi. Studenti neretko imaju problem da razne definicije, matematičke probleme i modele ne mogu lako da vizuelizuju i razumeju, pa je dinamičko okruženje koje pružaju ova dva softvera odlična podrška upravo u ovakvim situacijama. U Srbiji je i nekoliko doktorata napisano na ovu temu, videti [2, 3].

Da biste mogli da ispratite i razumete ovaj tekst, neophodno je da imate neko prethodno iskustvo u radu sa pomenuta dva softvera. Ukoliko, do sada, niste bili u prilici da se upoznate sa softverima GeoGebra i/ili Wolfram Mathematica, poželjno bi bilo da se prvo malo upoznate sa njima, uz pomoć odgovarajuće literature. U tu svrhu predlažemo vam: [4] – za softver GeoGebra i [1] – za softver Wolfram Mathematica.

Rukopis je podeljen u tri celine. U prvom poglavlju ćete se upoznati sa nekim važnijim alatkama GeoGebre, koje vam omogućavaju kreiranje dinamičkih apleta. U drugom poglavlju ćete upoznati naredbe u Wolfram Mathematica, pomoću kojih ćemo kreirati animacije. Napokon, u trećem i ujedno i poslednjem poglavlju, predstavimo tri problema, koje ćemo prikazati u oba softvera, a koji omogućavaju studentima lakšu vizuelizaciju i razumevanje datih problema.

Nakon čitanja ovog teksta, verujemo da ćete moći i sami da kreirate razne aplete i animacije, koje ćete moći i vi da koristite tokom nastave, ali i studenti tokom samostalnog rada.

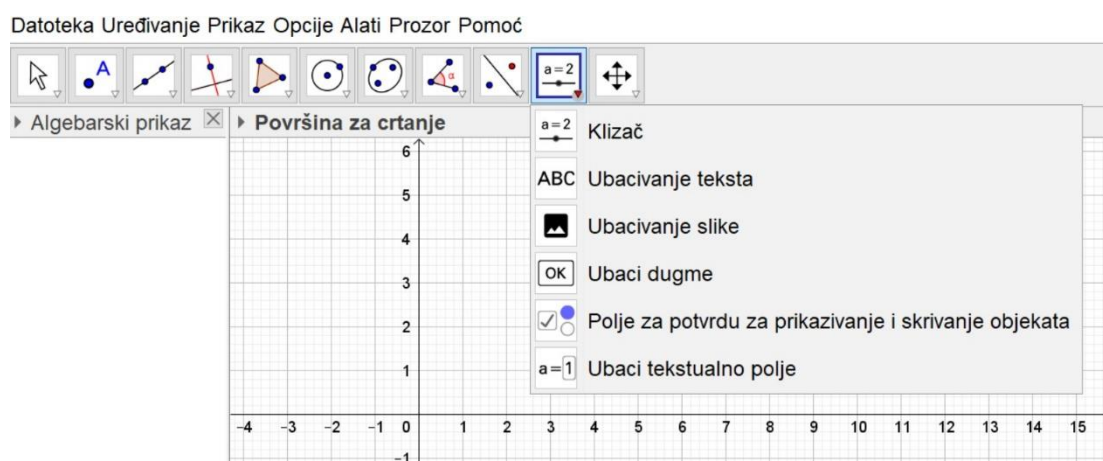
Ovaj rukopis nastao je kao rezultat rada na Erasmus+ projektu TeComp.

## GeoGebra

GeoGebra je dinamički matematički softver, u kojem možete prikazati i rešavati probleme iz geometrije, algebre, analize, statistike... Ovaj softver je razvio Markus Hohenwarter i međunarodni tim programera. Ime ovog softvera sastavljeno je od reči GEOMETrija i alGEBRA [2]. Potpuno je be-splatno preuzimanje i korišćenje ovog softvera, pa je zato lako dostupan svima. Potoji i mobilna aplikacija GeoGebra za pametne telefone, koju podržavaju i Android i iOS. Dakle, da bi studenti mogli da koriste GeoGebru, ne moraju ni imati računar ispred sebe, dovoljno je da poseduju mobilni telefon, što dodatno olakšava njeno korišćenje. GeoGebra je prevedena na više desetina jezika, a podržava i srpski.

GeoGebra je vrlo jednostavna za korišćenje i svaki korisnik će se vrlo brzo i lako snaći sa osnovnim alatima. Mi ćemo se baviti naprednijim opcijama, koje će nam omogućiti bolju vizuelizaciju različitih problema, a samim tim i njegovo lakše i brže razumevanje i rešavanje.

U ovom poglavlju ćemo se baviti, pre svega, opcijama prikazanim na slici 1.1.



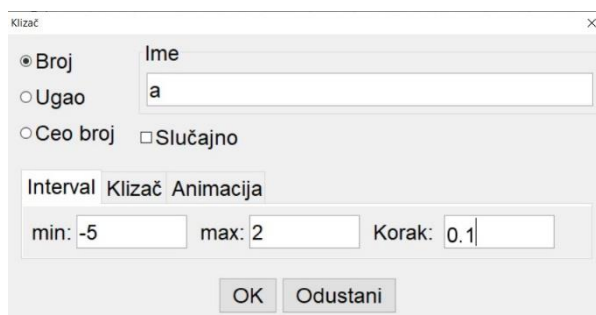
Slika 1.1: GeoGebra – interaktivni prozor.

Dakle, posebnu pažnju poklanjamo sledećim opcijama:

Klizač;

Polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekata;

Ubaci tekstualno polje.

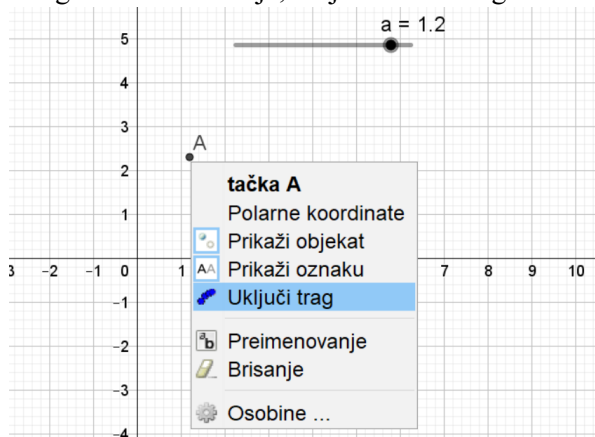


Slika 1.2: Upotreba klizača.

Opcija „Klizač” omogućava nam da uradimo razne animacije koje nam olakšavaju razumevanje raznih problema. Prikažimo to na primeru crtanja grafika funkcije  $y = 2^x$ . Kada učenike u školi, a neretko i studente pitate za definiciju pojma grafika funkcije – dobićete razne odgovore, ali retko koji će biti u

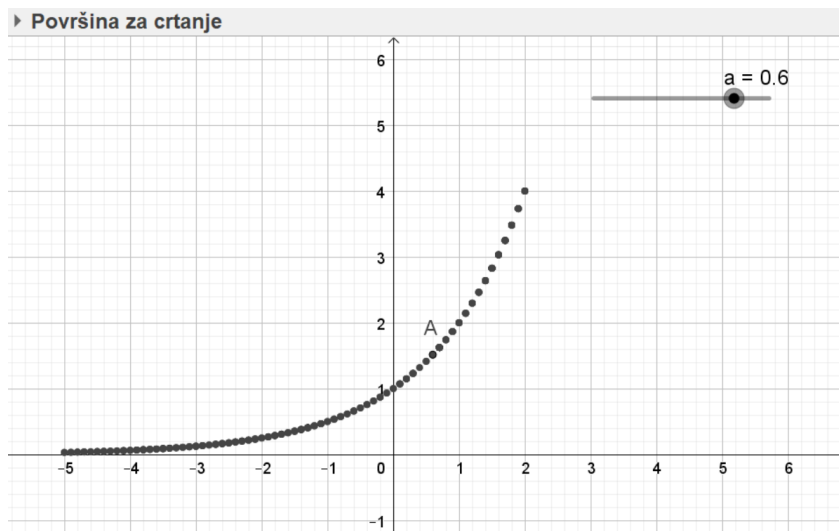
potpunosti tačan. Najčešće se grafik funkcije  $f$  povezuje sa (neprekidnom) krivom, što je u osnovi pogrešno. Mali je broj onih koji će reći da je to skup tačaka  $Gr_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ . GeoGebra nam omogućava da ovo prikazemo, upravo kroz upotrebu klizača. Ako postavimo klizač, pojaviće se dijalog prozor, kao na slici 1.2.

Potrebno je uneti interval u kome će se kretati vrednosti klizača  $a$ , uz definisan korak. Sada, ako u polju za unos definišemo tačku  $A(a, 2^a)$ , promenom vrednosti na klizaču menjaće se i pozicija ove tačke. Da bismo videli kako izgleda grafik ove funkcije, uključićemo i trag ove tačke kao na slici 1.3



Slika 1.3: Trag.

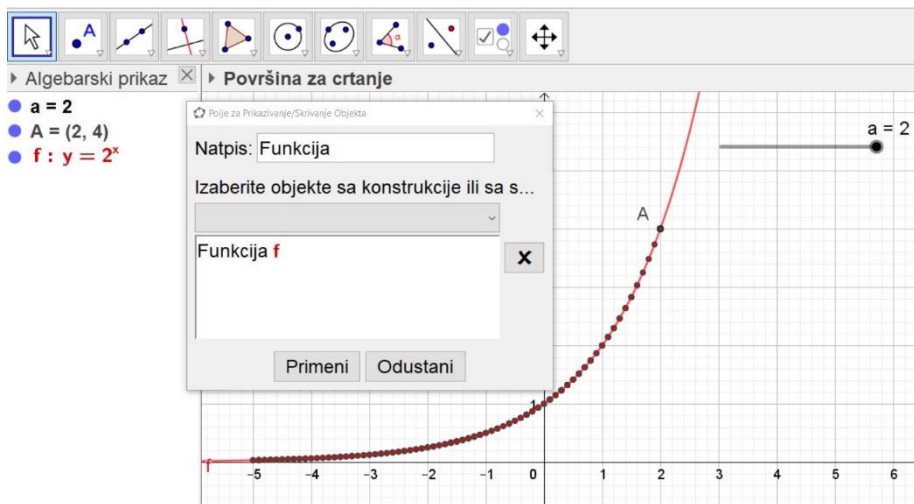
Sada, promenom vrednosti klizača na celom intervalu koji smo definisali, tačka A će opisati skup tačaka koje se nalaze na grafiku funkcije  $y = 2^x$  (slika 1.4) i ovako se lakše, putem vizuelizacije, usvaja pojam funkcije.



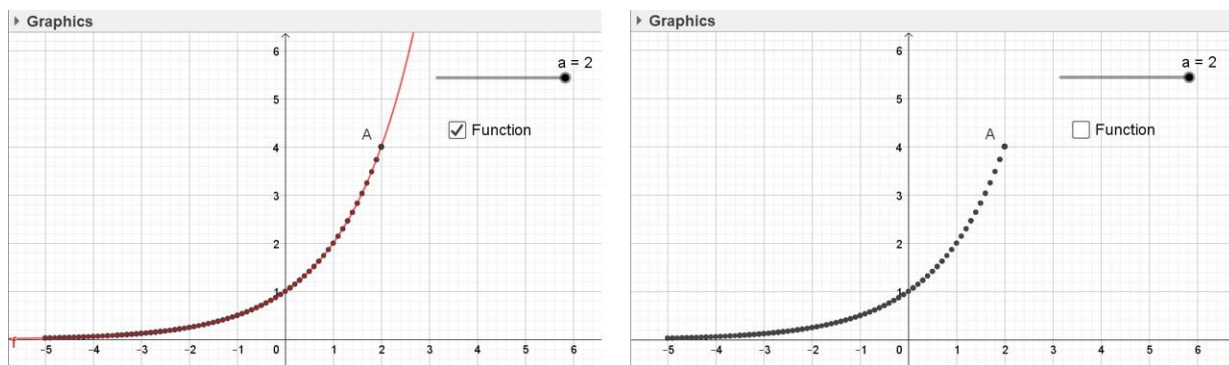
Slika 1.4: Tačke sa grafika funkcije  $y = 2^x$ .



Dodajmo sada i samu funkciju  $y = 2^x$  (u nekoj drugoj boji), kako bi pokazali kako možemo da upotrebimo alatku „Polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekata”. Izborom ove alatke, otvara se prozor u kojem treba ovo polje da povežemo sa nekim od objekata. U našem slučaju, to je funkcija  $f$  (slika 1.5). Na ovaj način dobijamo polje, koje prikazuje funkciju, ako je označeno. U suprotnom, ta funkcija neće biti prikazana u GeoGebri, slika 1.6.

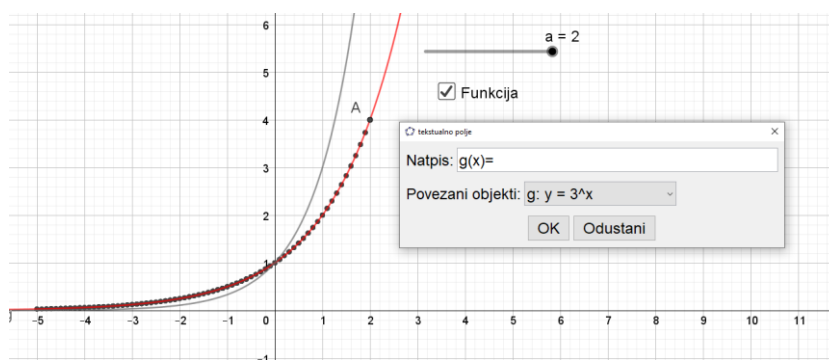


Slika 1.5: Polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekata.



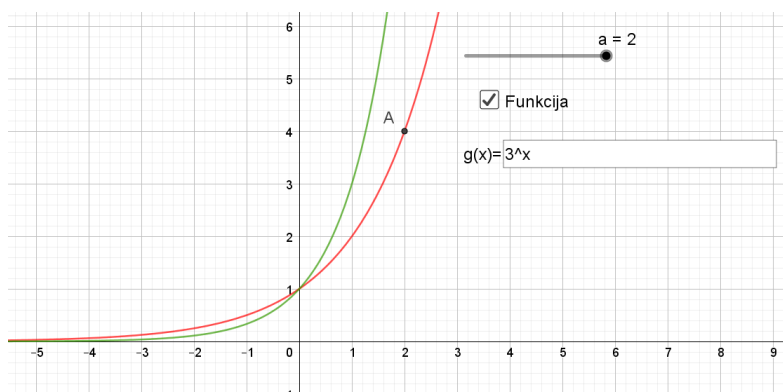
Slika 1.6: Označeno i neoznačeno polje.

Prikažimo još i upotrebu opcije „Ubaci tekstualno polje”. Pre toga definišimo još jednu funkciju, recimo  $g(x) = 3^x$  koju želimo da nacrtamo na istoj slici i da uporedimo sa funkcijom  $f$ . Ako izaberemo pomenutu opciju, otvoriće se dijalog prozor kao na slici 1.7. Neophodno je ovo polje povezati sa nekim od već definisanih objekata – u našem slučaju, to će biti funkcija  $g$ .



Slika 1.7: Opcija "Ubaci tekstualno polje".

Nakon toga će se na slici pojaviti i ovo tekstualno polje, slika 1.8. Promenom vrednosti u tom polju, promeniće se i vrednost funkcije  $g$ . Generalno, ova opcija omogućava korisniku da promenom vrednosti ovih polja menja vrednosti već definisanih objekata.



Slika 1.8: Izgled tekstualnog polja.

## Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica (skraćeno Mathematica) jeste matematički softver (programski jezik i paket) za sim-boličko i numeričko rešavanje problema iz svih naučnih disciplina, u kojima je matematika neophodna za modeliranje i rešavanje. Tvorac ovog softvera je Stephen Wolfram, a dalje ga razvija kompanija Wolfram Research. Za razliku od GeoGebre, Mathematica nije besplatna, pa samim tim i nije lako i široko dostupna. Sa druge strane, Mathematica pruža mnogo više mogućnosti od GeoGebre za različite veoma složene postupke, a može se iskoristiti i za vizeulizaciju mnogih problema, kako bi studenti mogli lakše da ih razumeju. Ovde ćemo posebnu pažnju obratiti na dve ugrađene funkcije koje nam omogućavaju dinamički prikaz problema:

Manipulate;

Animate.

Funkcija „Manipulate” omogućava postavljanje klizača. Prikažimo to na istom primeru, kao i kod GeoGebre. „Manipulate” zahteva dva argumenta `Manipulate[naredbe, {k, a, b, step}]`. Prvi je niz naredbi, a drugi predstavlja vrednost  $k$  koja će biti prikazana na klizaču i koja će uzimati vrednosti od  $a$  do  $b$  sa korakom „step”.

Sada ćemo ovu opciju iskoristiti da bi iscrtali tačke sa grafika funkcije  $y = 2^x$ . Za to će nam trebati i sledeće funkcije:

**Table** koja kreira listu – u našem slučaju listu uređenih parova  $(a, 2^a)$ .

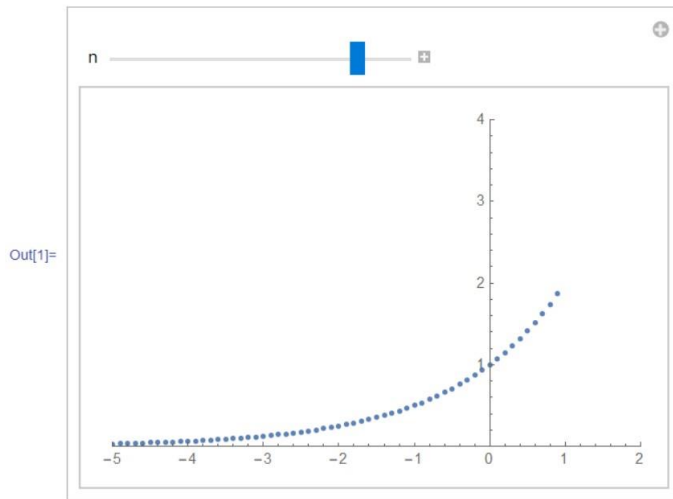
**ListPlot** koja iscrtava dati skup tačaka. Ovde ćemo iskoristiti i dve dodatne opcije za crtanje grafika.

Opcija `PlotStyle→PointSize[ ]` nam daje mogućnost da zadamo veličinu tačaka, koje crtamo (uvećamo ih ukoliko želimo da ih dodatno istaknemo). Druga opcija koju ćemo iskoristiti je `PlotRange`, pomoću koje možemo da definišemo na kojem intervalu ćemo prikazati grafik (prvi uređeni par predstavlja vrednosti sa x-ose, dok drugi daje interval na y-osi koji će biti prikazan).

Na slici 2.1 možemo videti da upotrebom pomenutih funkcija dobijamo klizač  $n$ , koji predstavlja broj tačaka koje crtamo. Pomeranjem ovog brojača udesno dobijamo sve veći broj tačaka sa grafika funkcije

$y = 2^x$  i bolju predstavu šta grafik funkcije zaista znači. U datom primeru, korak sa kojim menjamo vrednosti broja  $n$  je 0.1.

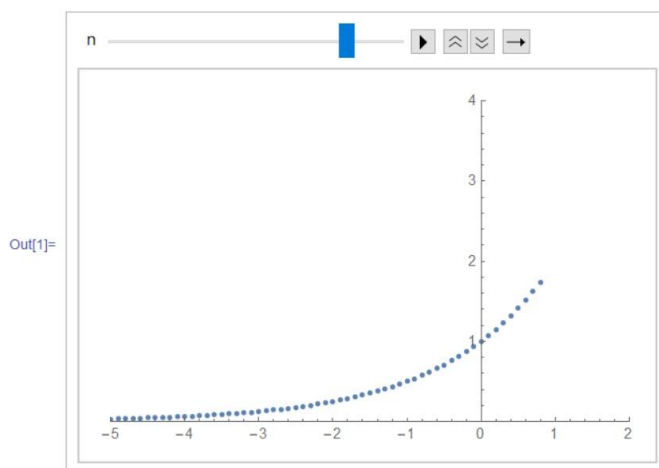
```
In[1]= Manipulate[ListPlot[Table[{a, 2^a}, {a, -5, n, 0.1}], PlotStyle -> PointSize[0.01],
  PlotRange -> {{-5, 2}, {0, 4}}, {n, -5, 2, 0.1}]
```



Slika 2.1: Manipulate.

Isti poziv, odnosno iste argumente, ima i funkcija „Animate”. Jedina razlika je u tome što se izvršavanjem ove naredbe odmah startuje odgovarajuća animacija, koju možemo pomoću dugmadi prikazanih na slici 2.2 da zaustavljamo, usporavamo ili ubrzavamo. Takođe možemo i da menjamo smer brojača (opadajući ili rastući).

```
In[1]= Animate[ListPlot[Table[{a, 2^a}, {a, -5, n, 0.1}], PlotStyle -> PointSize[0.01],
  PlotRange -> {{-5, 2}, {0, 4}}, {n, -5, 2, 0.1}]
```



Slika 2.2: Animate.

## Primena softvera GeoGebra i Mathematica u vizuelizaciju nekih složenijih problema

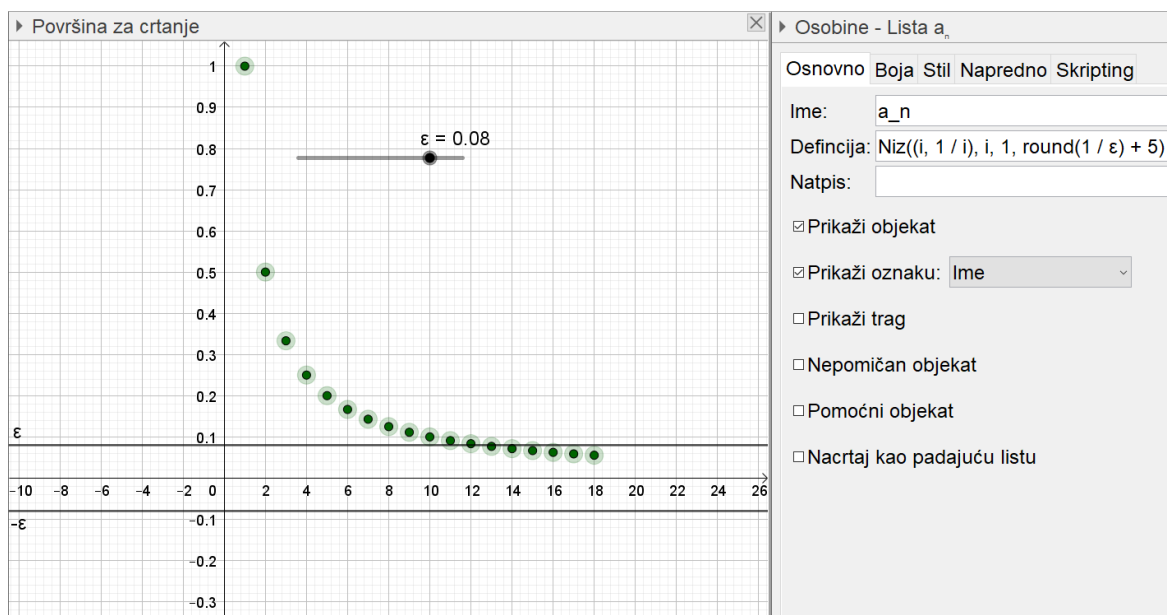
U ovom poglavlju, kroz tri složenija primera pokazaćemo kako neki problem može da se bolje vizuelizuje i tako lakše shvati i reši. Predavači će, nakon toga, biti u mogućnosti da i za mnoge druge matematičke probleme urade slične animacije.

**Primer 3.1** Jedan od najvećih problema za studente prve godine je razumevanje definicije konvergentnog niza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Pokušaćemo kroz animacije u GeoGebri i Mathematica, da olakšamo shvatanje ove definicije.

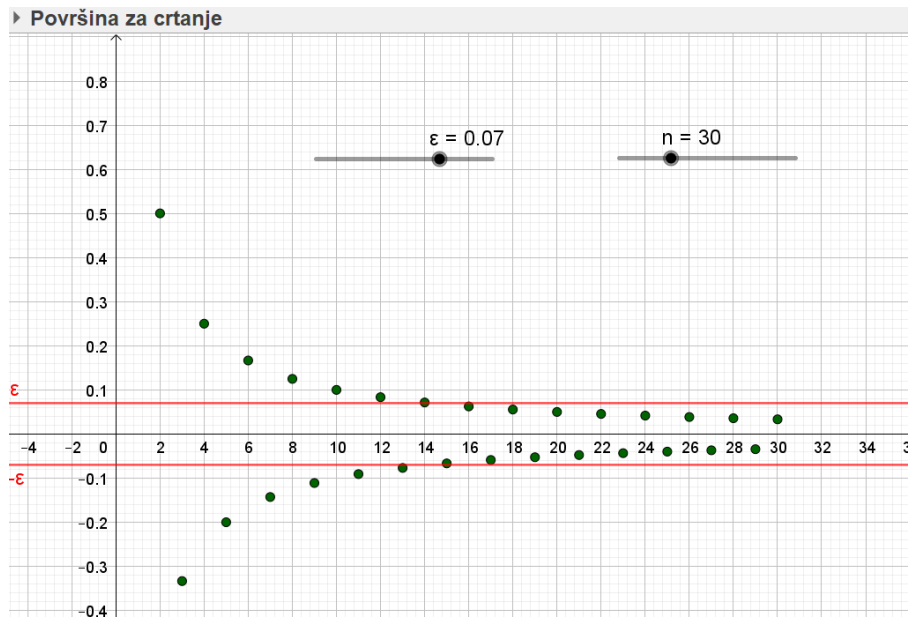
Za početak ćemo posmatrati niz  $a_n = \frac{1}{n}$ . Jasno je da za svako  $\varepsilon$ , lako dobijamo da je  $n_0 = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$ . Postavićemo klizač za  $\varepsilon$ , a crtaćemo niz pomoću naredbe "Niz". Ova naredba nam omogućava da kreiramo niz tačaka  $\{(k, a_k) | k = 1, 2, \dots, m\}$ . Vrednost za  $m$  biramo tako da bude nešto veća od  $n_0$  da se vidi ne samo koja prva tačka upada u  $\varepsilon$ -okolinu, nego i nekoliko narednih koji se nalaze u toj okolini. U našem paletu uzeli smo da je  $m = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 5$ , slika 3.1. Pomeranjem klizača, to jest promenom vrednosti  $\varepsilon$  menja se i  $\varepsilon$ -okolina tačke 0, a studenti mogu da vide da će ovaj niz, bez obzira na vrednost  $\varepsilon$ , počev od nekog člana, biti u toj okolini.



Slika 3.1: Niz  $a_n = \frac{1}{n}$ .

Razmotrimo i jedan nemonotoni niz  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Da bi prikazali međuzavisnost  $\varepsilon$  i  $n_0$ , ovog puta ćemo konstruisati dva klizača za ove vrednosti, slika 3.2. Na ovaj način možemo menjati i  $\varepsilon$ -okolinu tačke 0 i broj tačaka niza koje želimo da prikažemo studentima.

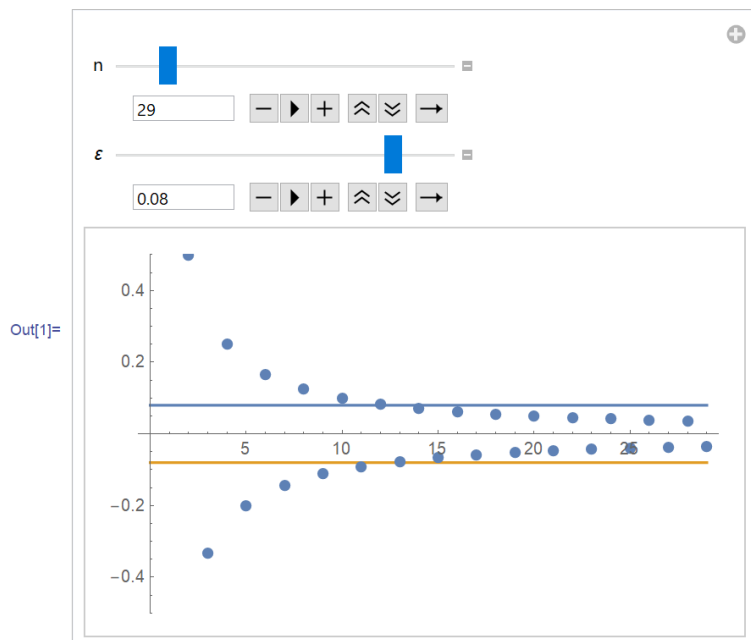
Naravno, veoma lako se može kreirati sličan aplet za bilo koji drugi niz i neka drugu  $\varepsilon$ -okolinu neke tačke.



Slika 3.2: Niz  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Napokon, sličnu konstrukciju ćemo izvesti i u Mathematica. Naredba "Show" će nam omogućiti da na jednom grafiku prikažemo i  $\varepsilon$ -okolinu (pomoću funkcija  $y = \varepsilon$  i  $y = -\varepsilon$ ) i niz tačaka koji predstavljaju elemente niza  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Za svaki klizač možemo prikazati trenutne vrednosti i animirati ih klikom na ikonicu koja se nalazi na kraju klizača, slika 3.3.

```
In[1]:= Manipulate[Show[Plot[{ε, -ε}, {x, 0, n}, PlotRange → {-0.5, 0.5}],
  ListPlot[Table[{i, (-1)^i/i}, {i, 1, n}]], {n, 2, 200, 1}, {ε, 0.5, 0, -0.001}]
```



Slika 3.3: Niz  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  u Mathematica.

**Primer 3.2** Kada se definiše određeni integral, studentima neretko nije jasan pojam Rimanove sume. Pokažimo kako u GeoGebri i Mathematica možemo ovaj pojam da im približimo.

Ako posmatramo

$$\int_a^b f(x) dx,$$

Rimanova suma za podelu  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  se definiše na sledeći način

$$s(f, a, b, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Mi ćemo ovde posmatrati samo ekvidistantnu podelu, to jest podelu koje je

$$x_i = a + i h, \text{ gde je } h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Prikazaćemo tri izbora tačaka  $\xi_i$ :

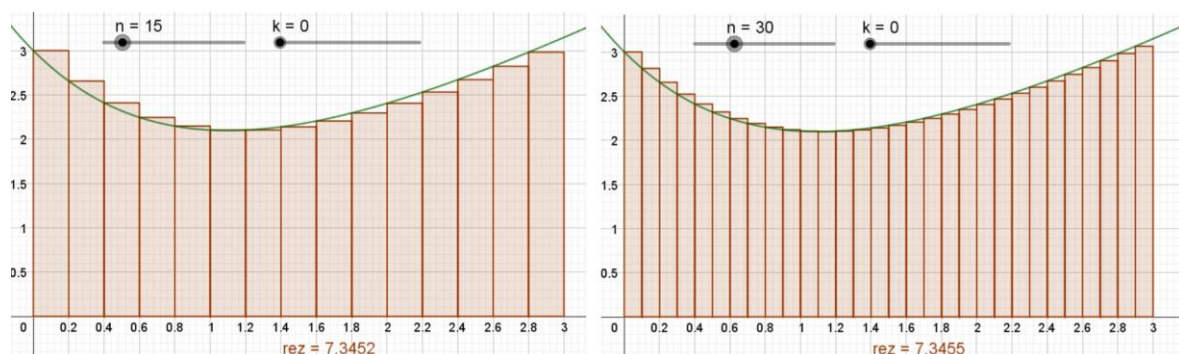
- $\xi_i = x_i$ , za  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  – levi pravougaonici;
- $\xi_i = x_{i+1}$ , za  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  – desni pravougaonici;
- $\xi_i = x_i + \frac{h}{2}$ , za  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  – srednji pravougaonici.

Naredba koju ćemo koristiti je "SumaPravougaonika", koju pozivamo sa 5 argumenata. Prvi je (podintegralna) funkcija, a naredna dva su granice  $a$  i  $b$  u kojima tražimo integral. Četvrti argument je broj podintervala na koje ćemo podeliti  $[a, b]$ . Poslednji argument je pozicija početka pravougaonika (za 0 – dobijamo leve pravougaonike, za 1 – desne, a za 1/2 – srednje pravougaonike).

Na primeru

$$\int_0^3 (3e^{-x} + x) dx.$$

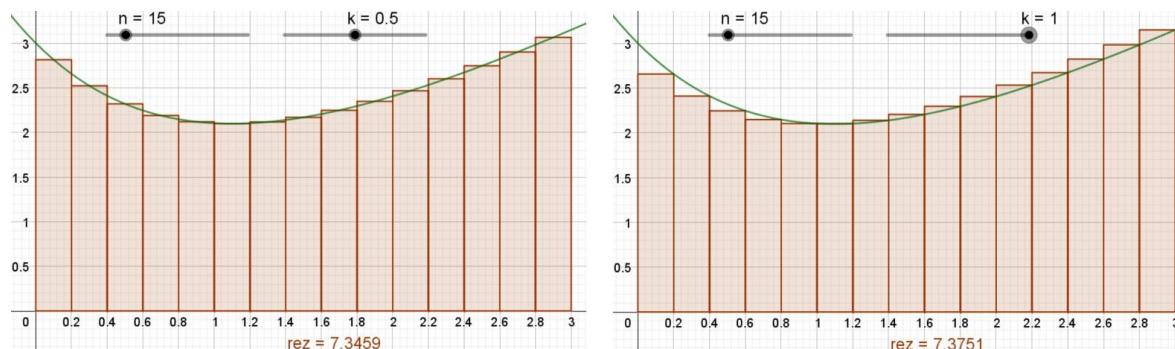
ćemo pokazati kako se može vizuelizovati Rimanova suma. Prvo ćemo to učiniti u GeoGebri. Postavićemo dva klizača. Prvi je  $n$  – broj podintervala, odnosno pravougaonika, a drugi je  $k \in [0, 1]$  – pozicija početka pravougaonika. Na slici 3.4 su prikazani levi pravougaonici za  $n = 15$  i  $n = 30$ . Ispod grafika se ispisuje i promenljiva "rez" koja predstavlja vrednost zbira površina levih pravougaonik.



Slika 3.4: Levi pravougaonici.

Slično, možemo dobiti i srednje i desne pravougaonike (slika 3.5), postavljanjem klizača  $k$  na vrednosti 1/2 i 1, redom. Naravno, promenom vrednosti na klizaču  $k$  možemo dobiti različite pravougaonike. I

ispod grafika sa slike 3.5 ćemo ispisati „rez” koji predstavlja vrednost zbira površina srednjih, odnosno zbira površina desnih pravougaonika.



Slika 3.5: Srednji (levo) i desni (desno) pravougaonici.

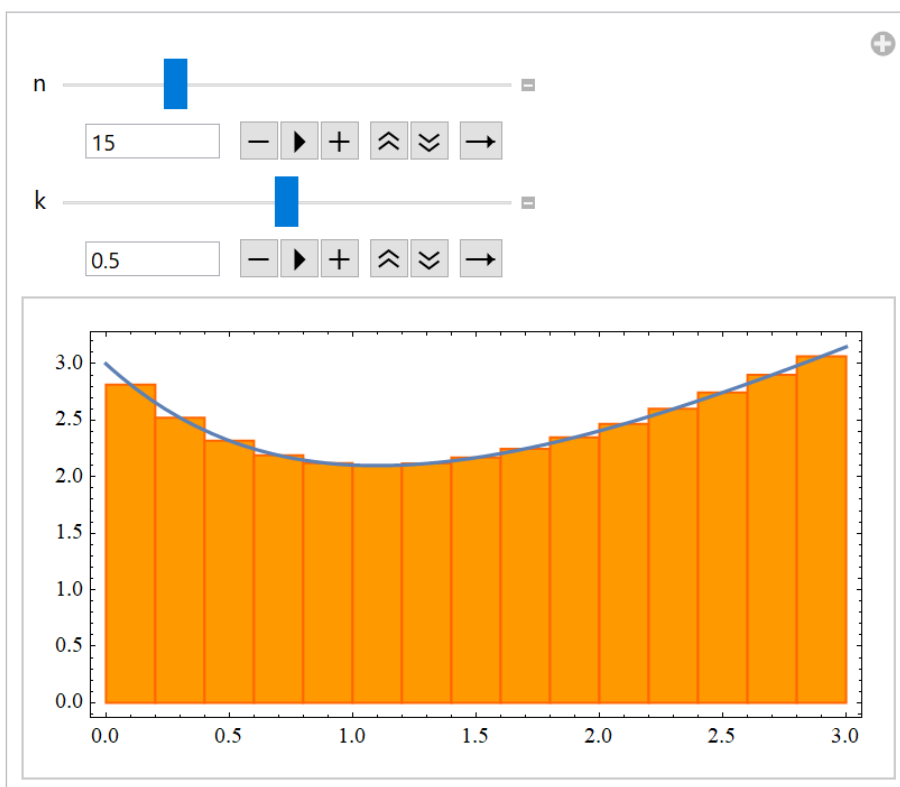
Da bismo u Mathematica mogli da animiramo Rimanovu sumu, neophodno je isprogramirati odgovarajuću funkciju „pravougaonici”, koja će iscrtavati zadate pravougaonike i računati integralnu sumu. Ovu funkciju ćemo pozivati sa više argumenata. Prvi argument je podintegralna funkcija, a potom slede nezavisna promenljiva, donja i gornja granica integrala  $a$  i  $b$  i  $n$  – broj pravouganika koje crtamo. Pretposlednji argument  $k$  predstavlja poziciju početka pravougaonika, a poslednji argument odnos jediničnih duži na  $x$  i  $y$ -osi. Ceo kod je dat na slici 3.6.

```
pravougaonici[f_, {x_, a_, b_, n_}, k_, ar_] := Module[{h, xi, xih, gr, pl, t, fp},
  h =  $\frac{b - a}{n}$  // N;
  gr = Graphics [
    Table [
      xi = a + (i - 1) h;
      xih = xi + h;
      fp = f /. x -> xi + k * h;
      {
        RGBColor[1, 0.6, 0],
        Rectangle[{xi, 0}, {xih, fp}],
        RGBColor[1, 0.4, 0],
        Line[{{xi, 0}, {xih, 0}, {xih, fp}, {xi, fp}, {xi, 0}}]
      },
      {i, 1, n}] // Flatten
  ];
  Print["Rez: ", {n, SetPrecision[Sum[h * f /. x -> (a + i * h + k * h), {i, 0, n - 1}], 5]};
  pl = Plot[f /. x -> t, {t, a, b}];
  Show[gr, pl, Frame -> True, AspectRatio -> ar]
]
```

Slika 3.6: Program u Mathematica – prikaz Rimanove sume (pravougaonika)

Sada pomoću funkcije "Manipulate" možemo animirati ovu sumu, a ispod grafika će biti i ispisana vrednost integralne sume. Na slici 3.7 su prikazani srednji pravougaonici.

Manipulate[pravougaonici[ $3 E^{-x} + x$ , { $x$ , 0, 3,  $n$ },  $k$ , 0.5], { $n$ , 4, 50, 1}, { $k$ , 0, 1, 0.1}]



Rez: {15, 7.3459}

Slika 3.7: Srednji pravougaonici – Mathematica

**Primer 3.3** U poslednjem primeru, uz pomoć GeoGebre i Mathematica, prikazaćemo primenu Njutnovog postupka za numeričko rešavanje jednačine  $f(x) = 0$ .

Ako je  $x_0$  početna iteracija, onda se iteracije Njutnovog postupka dobijaju na sledeći način

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Geometrijska interpretacija ovog postupka je nama posebno interesantna i nju možemo prikazati u nekom dinamičkom okruženju. Iteracija  $x_{k+1}$  se dobija kao presek tangente iz tačke  $(x_k, f(x_k))$  na krivu  $y = f(x)$  sa  $x$ -osom. Naravno, poželjno je i nacrtati prvih nekoliko iteracija, što gotovo da nije moguće pomoću klasičnih nastavnih sredstava. Zato ćemo prikazati kako to može da se izvede, prvo korišćenjem GeoGebre.

Da bismo dobili niz iteracija neophodno je iskoristiti naredbu "IteracijaLista", koja ima tri argumenta. Prvi argument je funkcija  $\varphi(x)$  pomoću koje se kreira iterativni postupak  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  U našem slučaju je ta funkcija defisana sa

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

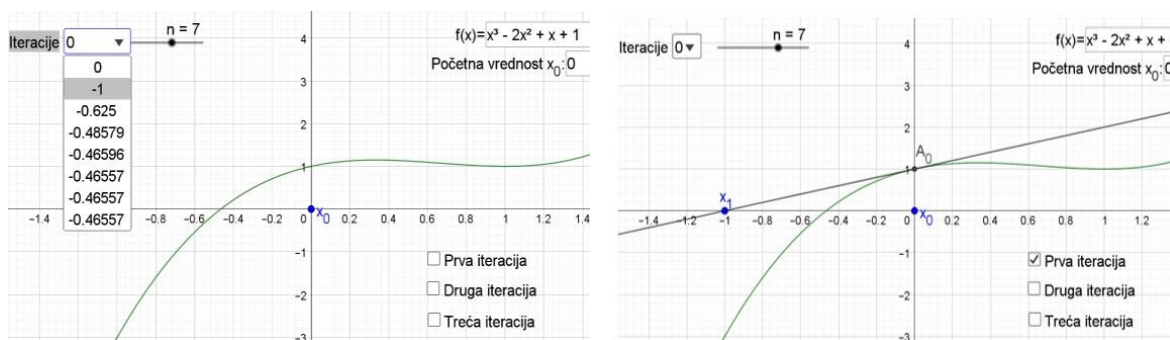
Izvod funkcije dobijamo lako upotrebom naredbe "Izvod". Drugi argument ove naredbe je početna iteracija  $x_0$ , a treći i poslednji je broj iteracija  $n$ .



Posmatraćemo jednačinu  $f(x) = 0$  za  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ . Iskoristićemo i alatku za ubacivanje tekstualnog polja, koju ćemo povezati sa ovom funkcijom, tako da korisnik ovog apleta može da promeni funkciju  $f$ . Isto to ćemo uraditi i za početnu iteraciju  $x_0$ .

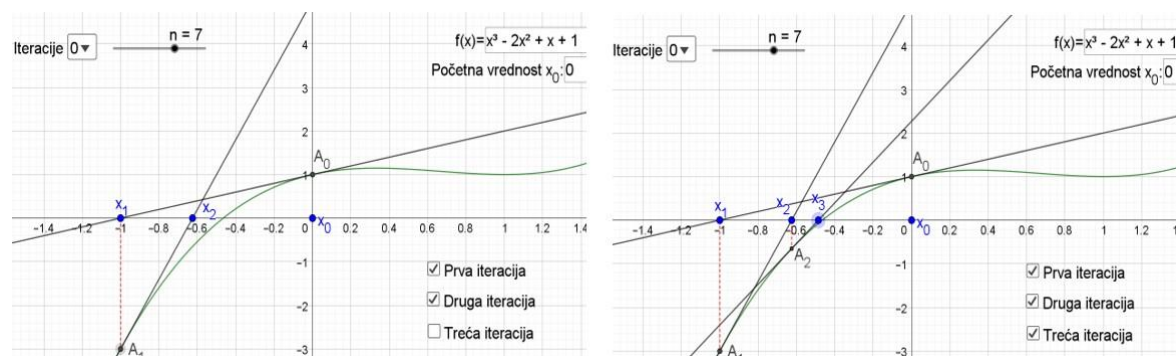
Takođe, postavilićemo klizač za  $n$  i kreirati listu iteracija, koju ćemo prikazati u okviru apleta u padajućem meniju.

Na slici 3.8 možemo videti prvih  $n = 7$  iteracija Njutnovog postupka, ako otvorimo listu (slika levo), kao i geometrijsku interpretaciju prve iteracije (slika desno). Primetimo da je na slici označeno samo polje "Prva iteracija".



Slika 3.8: Početna i prva iteracija Njutnovog postupka

Ako označimo i polja "Druga iteracija" i "Treća iteracija" (slika 3.9) dobijamo i drugu (slika levo) i treću iteraciju (slika desno), redom.



Slika 3.9: Druga i treća iteracija Njutnovog postupka

Da bismo u Mathematica prikazali Njutnov postupak, isprogramiraćemo funkciju "njutn" koja će računati iteracije ovog postupka i prikazivati njegovu geometrijsku interpretaciju. Ovu funkciju pozivamo sa 5 vrednosti prva je funkcija  $f$ , nakon koje sledi nezavisna promenljiva  $x$  i početna iteracija  $x_0$ . Poslednja dva argumenta predstavljaju redom broj iteracija  $n$  Njutnovog postupka i broj iteracija  $iter$  čiju geometrijsku interpretaciju želimo da prikažemo, slika 3.10. U okviru ove funkcije koristimo:

ugrađenu funkciju za izvod – **D[·, ·]**;

ugrađenu funkciju za minimum i maksimum elemenata liste – **Min[·], Max[·]**;

**Do** petlju.

Pored pomenutih, upotrebili smo i opcije za boju grafika funkcije – **RGBColor[·, ·, ·]** i debljinu linije – **Thickness[·]**.

```

njutn[f_, {x_, x0_}, n_, iter_] := Module[{prvi, tacke, tangente},
  it[0] = x0 // N;
  prvi = D[f, x];
  Do[
    it[k+1] = it[k] -  $\frac{f /. x \rightarrow it[k]}{prvi /. x \rightarrow it[k]}$ , {k, 0, n-1}];
  lista = Table[{k, it[k], f /. x -> it[k]}, {k, 0, n}];
  tacke = Table[{it[k], 0}, {k, 0, iter}];
  tangente = Table[(prvi /. x -> it[k]) * (xx - it[k]) + (f /. x -> it[k]), {k, 0, iter-1}];
  m = Min[Table[it[k], {k, 0, n}]];
  M = Max[Table[it[k], {k, 0, n}]];
  gr1 = ListPlot[tacke, PlotStyle -> PointSize[0.025]];
  gr2 = ListPlot[Table[{it[k], f /. x -> it[k]}, {k, 0, iter-1}],
    PlotStyle -> {PointSize[0.025], RGBColor[0, 1, 0]};
  gr3 = Plot[tangente, {xx, m, M}];
  gr4 = Plot[f, {x, m, M}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.007]};
  Show[gr1, gr2, gr3, gr4, PlotRange -> All]
  ]

```

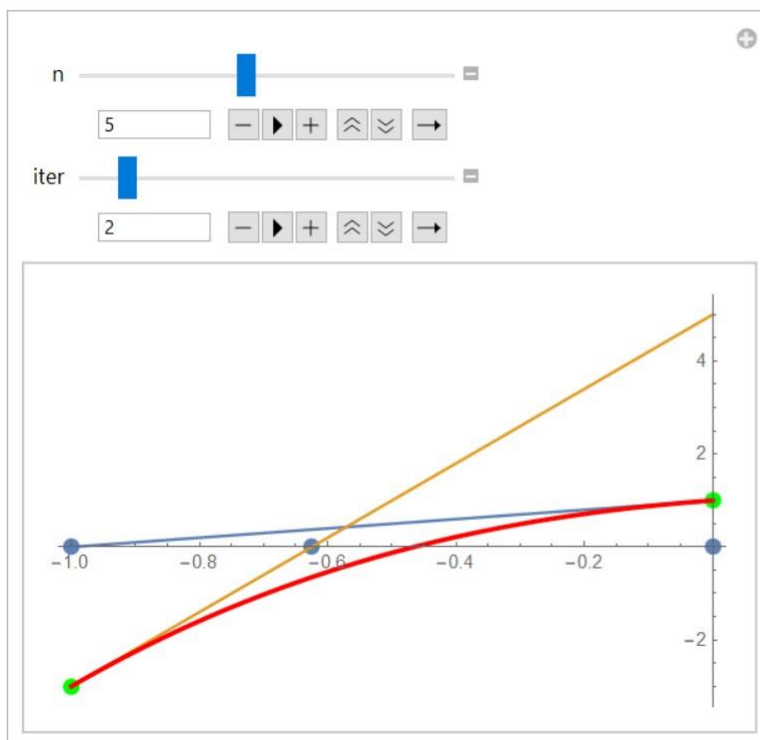
Slika 3.10: Kod funkcije za Njutnov postupak

Sada nam ostaje samo da izračunamo  $n$  iteracija i prikazemo za prvih  $iter$  iteracija geometrijske interpretacije, slika 3.11.

```

Manipulate[njutn[x3 - 2 x2 + x + 1, {x, 0}, n, iter], {n, 1, 10, 1}, {iter, 1, 10, 1}]

```



Slika 3.11: Njutnov postupak u Mathematica

Napokon, ispisaćemo i prvih  $n$  iteracija  $x_k$ , kao i vrednosti funkcije  $f(x_k)$  u tim iteracijama, slika 3.12.

```
TableForm[Join[{"k", "x[k]", "f[x[k]"}], lista]]
```

k	x[k]	f[x[k]]
0	0.	1.
1	-1.	-3.
2	-0.625	-0.650391
3	-0.485786	-0.0724016
4	-0.465956	-0.00135174
5	-0.465571	$-5.02402 \times 10^{-7}$

Slika 3.12: Prvih n iteracija Njutnovog postupka

## Literatura

- [1] Krejić, N., Herceg, Đ. "Matematika i mathematica", Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2004.
- [2] Ljajko, E. "Uticaj GeoGebra-e na predavanje i učenje analitičke geometrije u srednjoj školi", doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2014.
- [3] Prentović, B. "Računar u nastavi analitičke geometrije u gimnaziji", doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2015.
- [4] <https://wiki.geogebra.org/en/Tutorials>

**Autor:  
Durdica Takači**



created by wordfinder.com

## **Kombinovano učenje matematičkih sadržaja u dinamičkom okruženju**

PITANJA:

Kako se sprovodi kombinovano učenje u dinamičkom okruženju?

Kako se određuje površina paralelograma i zapremina paralelopipeda datih vektorima u dinamičkom okruženju?

Kako se određuje površina ravnih figura i zapremina obrtnih tela pomoću određenih integrala u dinamičkom okruženju?

## Sadržaj

Uvod.....	108
<u>Vektori u dinamičkom okruženju</u> .....	109
<u>Vektori u Dekartovom koordinatnom sistemu</u> .....	109
<u>Sabiranje vektora i množenje vektora skalarom</u> .....	111
<u>Skalarni proizvod vektora</u> .....	111
<u>Vektorski proizvod vektora</u> .....	112
<u>Mešoviti proizvod vektora</u> .....	113
<u>Određeni integral u dinamičkom okruženju</u> .....	115
<u>Definicija određenog integrala</u> .....	115
<u>Osobine određenog integrala</u> .....	117
<u>Površina između krivih</u> .....	118
<u>Površina u parametarskom obliku</u> .....	120
<u>Površina u polarnim koordinatama</u> .....	121
<u>Zapremina obrtnih tela</u> .....	123
<u>Dužina luka krive</u> .....	125
<u>Površina obrtnih tela</u> .....	126
<u>Literatura</u> .....	128

## Uvod

Kombinovano ili hibridno učenje (blended learning) nastaje integrisanjem novih informacionih i komunikacionih tehnologija, ICT, u nastavni proces ([1], [2]). Pojavom interneta i svetske komunikacione mreže „World Wide Web”, kasnih devedesetih godina prošlog veka ([8], [9]) i početkom 21. veka, kombinovano učenje se intenzivno razvija, da bi u poslednjih godinu dana, za vreme Covid 19 krize, postalo i jedini metod učenja u celom svetu.

U literaturi (na primer [1], [2]) postoje različite definicije kombinovanog učenja. Pod terminom kombinovano učenje (blended learning) mi ćemo podrazumevati: učenje na daljinu (distance learning), e-učenje, kao i učenje licem u lice (face to face). Osnovna karakteristika učenja na daljinu jeste fizička razdvojenost nastavnika i studenta ([6]). Kvalitetno učenje na daljinu pretpostavlja razvijeno ICT okruženje i praktično se bez njega i ne može primenjivati. Znači učenje na daljinu podrazumeva i e-učenje ili onlajn učenje, jer je ono povezano sa upotrebom različitih medija u nastavnom procesu. Sa druge strane i učenje u učionici (face to face) se danas sve više odvija u modernom ICT okruženju.

U ovom radu pripremljeni su i prikazani nastavni materijali za kombinovano učenje početnog kursa matematike na svim fakultetima i Univerzitetima širom sveta. Oni se mogu primenjivati i prilikom izvođenja nastave na daljinu, kao i u učionici, ali je u oba slučaja potreban dobar internet. Znači, nastavni materijali su pripremljeni za onlajn učenje.

Na osnovu dugogodišnjeg rada (u Srbiji i van nje) autor je stekao iskustva o kognitivnim konfliktima koji se javljaju prilikom savladavanja matematičkih sadržaja na pomenutim kursevima. Svi nastavni sadržaji obradjeni su metodički, sa ciljem boljeg razumevanja gradiva i otklanjanja kognitivnih konflikata. Svi obradjeni matematičkih sadržaji prikazani su i vizualno, odnosno pored algebarskih i verbalnih prikazuju se i odgovarajuće grafičke reprezentacije. Autor je (između ostalog) koristila programski paket *GeoGebra*, za nastavu u učionici sve do početka 2020. godine. Od tada, narednih godinu dana autor isključivo koristi *GeoGebra* za kombinovano učenje sa studentima i pri tome formira različite aplete za svaki čas. U ovom radu prikazuju se sredjeni apleti koje je autor smatrala da najviše doprinose otklanjanju kognitivnih poteškoća prilikom obrade nastavnih sadržaja iz matematike. Apleti su rađeni i za nastavnike i studente i pripremljeni materijali se mogu direktno prezentovati studentima bez prethodnih korekcija, ali se mogu i korigovati i prilagodjavati potrebama korisnika.

Pripremljeno je 30 dinamičkih apleta koji su izvezeni kao Web stranica u *GeoGebra Material*, na folderu [TECOMP-aplets](#), gde se mogu otvoriti i primenjivati njihova dinamička svojstva. *GeoGebra* aplet se otvara klikom na sliku ili na odgovarajuće tekstove gde se oni spominju. Otvoreni aplet se može koristiti tako što se pomeranjem klizača mogu istovremeno pratiti promene odgovarajućih grafičkih, verbalnih i algebarskih reprezentacija matematičkih objekata. Aktivirani aplet se može otvoriti i u *GeoGebra*, tako da se mogu menjati svi korišćeni objekti, kao što su vektori, funkcije, operacije i drugo i tako prilagodjavati neposrednim potrebama korisnika.

Na apletima su uglavnom korišćene samo dve površine za crtanje. Jedna površina za crtanje korišćena je kao bela tabla i na njoj je autor napisala verbalne i algebarske reprezentacije matematičkih objekata, na osnovu podataka dobijenih pomoću *GeoGebra*. Po potrebi su korišćene i ostale dve površine za crtanje, gde su prikazane grafičke reprezentacije odgovarajućih objekata. Tekst se u *GeoGebra* zapisuje u TEX-u, (koristi se samo nekoliko jednostavnih naredbi, a ima i dosta naredbi koje su date u „Simbolima”).

U radu je prikazana vizualna obrada matematičkih sadržaja. Odabrani sadržaji i njihova geometrijska tumačenja kod kojih vizualizacija i dinamičke osobine doprinose razumevanju. U prvom delu su obrađeni vektori i njihova primena na geometrijske zadatke. U drugom delu je obrađena definicija određenog integrala i njegova primena na izračunavanje površine krivolinijskog trapeza. Prikazano je i određivanje površine različitih ravnih figura ograničenih krivama koje su zadate u algebarskim i polarnim koordinatama, kao i pomoću parametra. Na kraju je obrađeno izračunavanje površine i zapremine tela koja su prikazana u 3D površini za crtanje, a aktiviranjem apleta moguće je pratiti i njihovo nastajanje.

## Vektori u dinamičkom okruženju

### –Vektori u Dekartovom koordinatnom sistemu

Neka je dat Dekartov pravougli koordinatni sistem sa osama  $x, y$  i  $z$  i koordinatnim početkom tačkom  $O$ . Neka su date tačke  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  i  $C(0,0,1)$ . Vektori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  definisani sa  $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$ , su koordinatni vektori ili ortovi. Na [Slici 1](#), desna površina za crtanje korišćena je za grafički 3D prikaz. Tačke  $A, B, C$  i ortovi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , prikazani su ljubičastom bojom.

Za svaki vektor  $\vec{a}$ , postoji jedinstvena tačka  $M(a_x, a_y, a_z)$  za koju je

$$\vec{OM} = \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

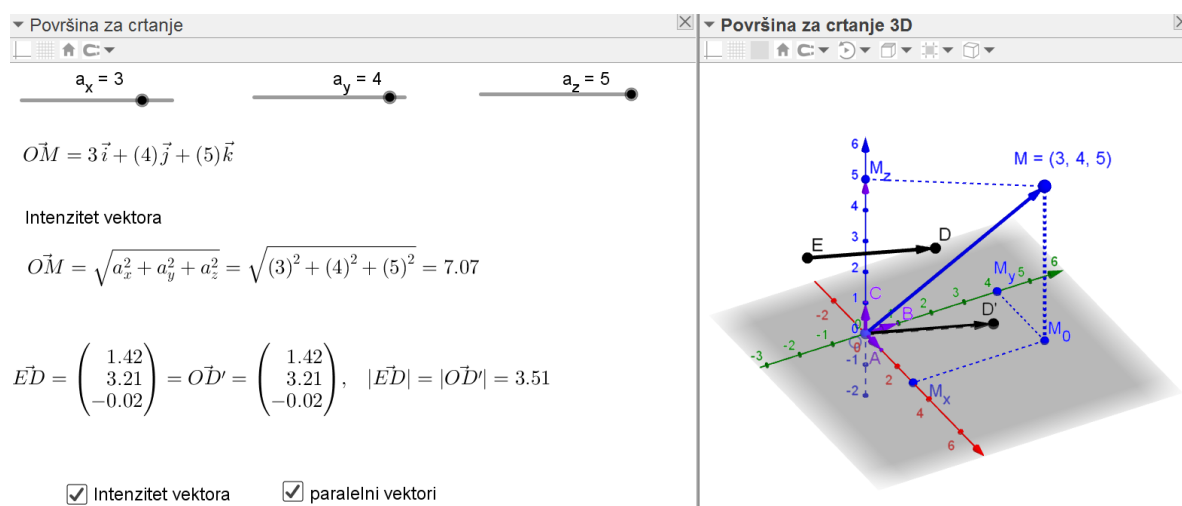
Na Slici 1, leva površina za crtanje je korisćena za algebarske i verbalne reprezentacije. Tu su prikazani klizači  $a_x, a_y, a_z$ , sa vrednostima 3, 4, 5, koje odgovaraju komponentama vektora  $\vec{OM}$ . Tačka  $M(a_x, a_y, a_z)$  prikazana je na grafiku (površina za crtanje 3D) (Slika 1), zajedno sa vektorom  $\vec{OM}$ , i njegovim komponentama  $\vec{OM}_x = a_x \vec{i}, \vec{OM}_y = a_y \vec{j}, \vec{OM}_z = a_z \vec{k}$  plavom bojom.

Intenzitet vektora u oznaci  $|\vec{OM}| = |\vec{a}|$  dat je relacijom

$$|\vec{OM}| = |\vec{a}| = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.$$

Za grafički prikaz vektora korišćemo površinu za crtanje 3D. u *Geogebra*. Osnovne naredbe su iste kao u površinama za crtanje 2D. Na primer, vektor se crta tako što posle naredbe „vector” kliknemo na dve tačke i istovremeno dobijemo algebarski i grafički prikaz.

Na Slici 1 prikazana je slika *GeoGebra* apleta, „TECOMP-Uvod vektori” koja se dobija klikom na sliku ili oznaku slike. Dinamički se mogu pratiti promene položaja vektora  $\vec{OM}$ , u zavisnosti od promene njegovih koordinata koje su date odgovarajućim klizačima.



Slika 1.

Radi preglednosti uvedena su i polja za prikaz „Intenzitet vektora” i „paralelni vektori”. Na Slici 1. oni su uključeni, pa predlažemo da se oni pre prezentacije isključe i da se postupno uključuju za vreme prezentacije.

Uključivanjem polja za prikaz „Intenzitet vektora” mogu se pratiti i promene intenziteta vektora  $|\vec{OM}|$ , izazvane promenom njegovih koordinata. Aplet se može koristiti i pri izvođenju formule za intenzitet vektora.

Uključivanjem polja za prikaz „paralelni vektori” može se vizualno pokazati da paralelni vektori istog intenziteta imaju iste komponente bez obzira gde se nalaze u prostoru. Pomeranjem tačaka  $E$  i  $D$  menja se vektor  $\vec{ED}$ , koji se paralelnim pomeranjem dovodi do vektora  $\vec{OD}'$ , čiji je početak u koordinatnom početku i ima iste komponente kao i vector  $\vec{ED}$ .

## Sabiranje vektora i množenje vektora skalarom

Zbir dva vektora  $\vec{OM} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\vec{ON} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  je vektor

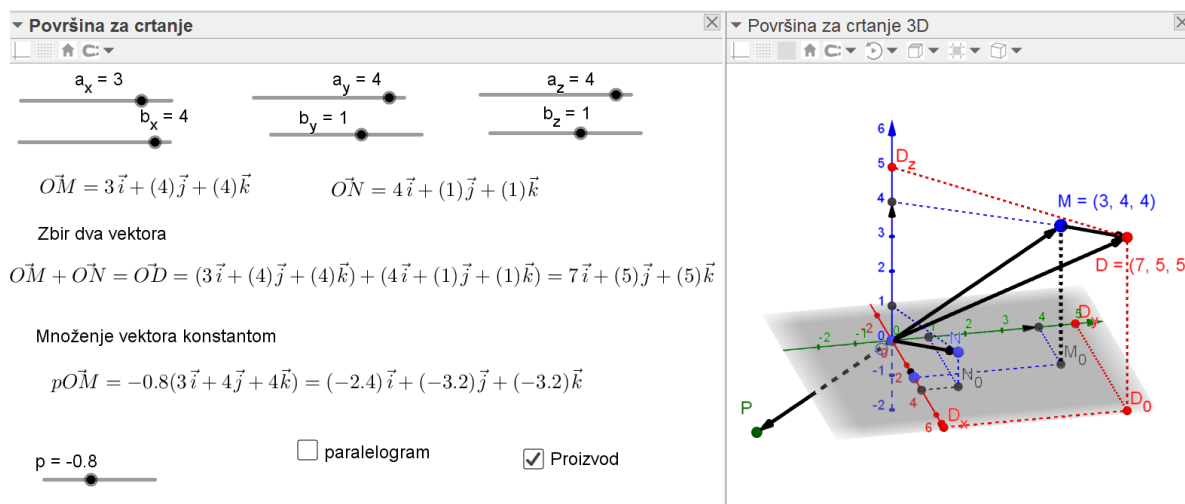
$$\vec{OD} = \vec{OM} + \vec{ON} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}.$$

Geometrijski, dva vektora se sabiraju tako što krajnja tačka prvog vektora postaje početna tačka drugog vektora. Vektor čiji početak početna tačka prvog vektora, a kraj krajnja tačka drugog vektora jeste njihov zbir.

Na [Slici 2](#), na levoj površini za crtanje prikazani su klizači  $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ , sa vrednostima 3, 4, 4, i 4, 1, 1, koje odgovaraju komponentama vektora  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ , respektivno, vektori  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$  i vektor  $\vec{OD} = \vec{OM} + \vec{ON}$ , u algebarskom obliku.

Na desnoj površini za crtanje 3D, na [Slici 2](#), grafički su prikazani vektori  $\vec{OM}$ ,  $\vec{ON}$  i njihov zbir, vektor  $\vec{OD}$ . Vizualno se prikazuje i geometrijsko sabiranje vektora  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ , a može se, uključivanjem polja za prikaz „parallelogram”, pokazati sabiranje i oduzimanje vektora pomoću paralelograma.

Uključivanjem polja za prikaz „Proizvod” može se vizualno pratiti algebarska i geometrijska reprezentacija množenja vektora  $\vec{OM}$  i skalara  $p$ .



Slika 2.

Pomoću istog apleta ([Slika 2.](#)) mogu se vizualno prikazati

osobine operacije sabiranja vektora, na osnovu kojih sledi da skup vektora u odnosu na operaciju sabiranja čini komutativnu grupu;

osobine operacije množenja vektora realnim brojem.

## Skalarni proizvod vektora

Skalarni proizvod dva vektora  $\vec{OM} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  i  $\vec{ON} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  definiše se kao

$$\vec{OM} \cdot \vec{ON} = |\vec{OM}| \cdot |\vec{ON}| \cos \alpha,$$



gde je  $\alpha$  ugao koji zaklapaju vektori  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ .

Na [Slici 3.](#) prikazana je slika *GeoGebra* apleta, [TECOMP-Skalarni proizvod](#), koji se dobja klikom na sliku ili oznaku slike. Dinamički se mogu pratiti promene skalarnog proizvoda vektora  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$  u zavisnosti od promene njihovih koordinata koje su date klizačima. Skalarni proizvod se izračunava, po definiciji, kao i na osnovu relacije

$$\vec{OM} \cdot \vec{ON} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Može se pratiti i zavisnost skalarnog proizvoda od ugla koji zaklapaju vektori  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ . Na primer, vektori  $\vec{OM} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  i  $\vec{ON} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$  seku se pod pravim uglom i njihov skalarni proizvod jednak je nuli. Takodje se može zapaziti da znak skalarnog proizvoda zavisi od toga da li je ugao oštar ili tup, jer kosinusi takvih uglova imaju različite znake.

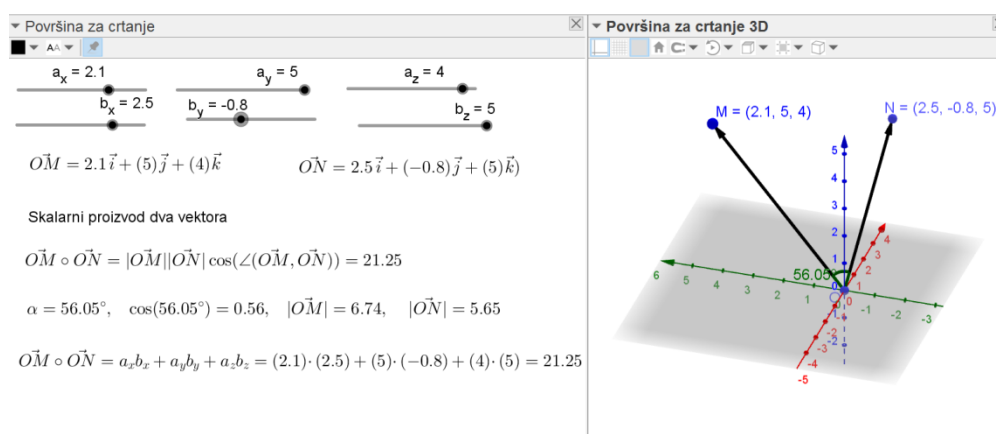
Dati aplet se može iskoristiti i za vizualno prikazivanje osobina skalarnog proizvoda:

$$\vec{OM} \cdot \vec{ON} = |\vec{OM}|^2;$$

Komutativnost.

Uvođenjem i trećeg vektora  $\vec{OP}$  može se i vizualno pokazati:

$$\vec{OM} \cdot (\vec{ON} + \vec{OP}) = \vec{OM} \cdot \vec{ON} + \vec{OM} \cdot \vec{OP}.$$



[Slika 3.](#)

## –Vektorski proizvod vektora

Vektorski proizvod dva vektora  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ , koji su različiti od nula vektora je vektor  $\vec{OD} = \vec{d}$ , u oznaci  $\vec{d} = \vec{OM} \times \vec{ON}$ ,

čiji je pravac određen normalom na ravan koju obrazuju vektori  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ ;

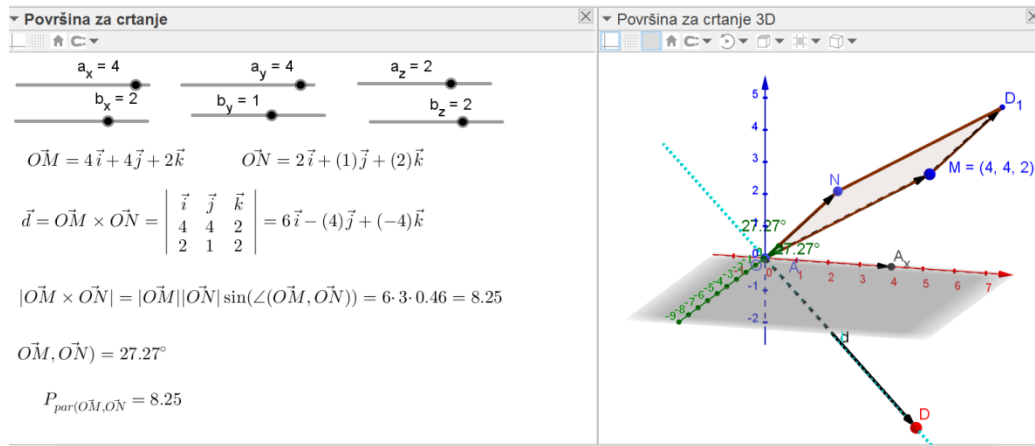
smer određen po pravilu desnog zavrtnja;

intenzitet  $|\vec{d}| = |\vec{OM}| \cdot |\vec{ON}| \sin \alpha$ , gde je  $\alpha$  ugao koji zaklapaju vektori  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$  i jednak je površini paralelograma koji određuju vektori  $\vec{OM}$  i  $\vec{ON}$ .

Vektorski proizvod dva vektora  $\vec{OM} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  i  $\vec{ON} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  može se odrediti i pomoću relacije:

$$\vec{d} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Na [Slici 4](#) prikazana je slika *GeoGebra* apleta, [TECOMP-vektorski proizvod](#), koji se dobija klikom na sliku ili oznaku slike. Vektor  $\vec{d}$ , vektorski proizvod vektora  $\overrightarrow{OM}$  i  $\overrightarrow{ON}$ , normalan je na ravan koju obrazuju isti vektori sa koordinatama datim klizačima. Promenom koordinata menja se vektorski proizvod i površina paralelograma koji obrazuju isti vektori. Uslovi za kolinearnost ta dva vektora mogu se takodje ispitivati pomoću istog apleta.



Slika 4.

Uvođenjem još jednog vektora  $\overrightarrow{OP}$  i skalara  $k$  (koji se mogu dati klizačima) mogu se vizualno pokazati osobine vektorskog proizvoda:

$$\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = -(\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OM});$$

$$(k\overrightarrow{OM}) \times \overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON});$$

$$\overrightarrow{OM} \times (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OP};$$

$$\overrightarrow{OM} \times (k\overrightarrow{OM}) = 0.$$

## –Mešoviti proizvod vektora

Mešoviti proizvod tri vektora  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{ON}$  i  $\overrightarrow{OP}$ ,  $(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}) \cdot \overrightarrow{OP}$  određuje se kao:

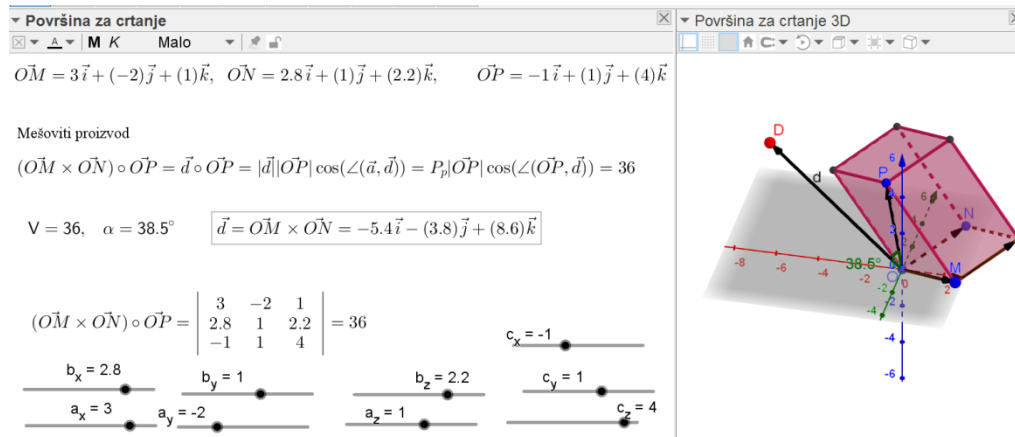
$$(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}) \cdot \overrightarrow{OP} = |\vec{d}| \cdot |\overrightarrow{OP}| \cos \alpha,$$

gde je  $|\vec{d}|$  intenzitet vektorskog proizvoda  $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$ ,  $\alpha$  je ugao koji vektor  $\vec{d}$  zaklapa sa vektorom  $\overrightarrow{OP}$ .

Na [Slici 5](#), prikazana je slika *GeoGebra* apleta, [TECOMP-mesoviti proizvod](#), koji se dobija klikom na sliku ili oznaku slike. Na površini za crtanje 3D prikazani su vektori  $\overrightarrow{OM} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{ON} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  i  $\overrightarrow{OP} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ , paralelepiped koji obrazuju vektori  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{ON}$  i  $\overrightarrow{OP}$ , čija je zapremina, određena pomoću GeoGebre, prikazana u levoj površini za crtanje. Takođe je izračunat mešoviti proizvod direktno i pomoću relacije:

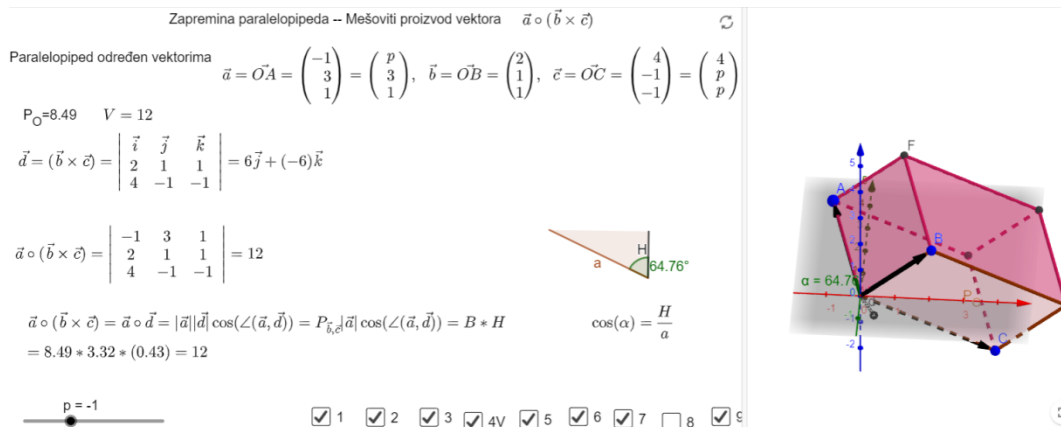
$$(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}) \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_z & c_z \end{vmatrix}$$

Prikazan je vektor  $\vec{d}$ , vektorski proizvod vektora  $\overrightarrow{OM}$  i  $\overrightarrow{ON}$ , algebarski i grafički, kao i ugao  $\alpha$  koji obrazuju vektori  $\vec{d}$  i  $\overrightarrow{OP}$ . Promenom koordinata vektora menja se paralelepiped koji obrazuju ta tri vektora, njegova zapremina i mešoviti proizvod vektora. Promena ugla  $\alpha$  može se iskoristi za diskusiju znaka mešovitog proizvoda. Promenom koordinata vektora mogu se analizirati i uslovi komplanarnosti ta tri vektora.



Slika 5.

Na [Slici 6](#) prikazan je još jedan aplet koji se klikom aktivira, gde su koordinate vektora zavisne samo od jednog parametra i jednostavniji je za sastavljanje zadataka koji se često daju na pismenim ispitima. Detaljni prikaz ovog apleta dat je preko [videoklipa](#).



Slika 6.

Zadatak: Dati su vektori  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  i  $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ .

- Odrediti vektor  $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{2} + 2\vec{b} - \vec{c}$ ;
- Odrediti površinu trougla koji obrazuju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{c}$ ;
- Odrediti visinu koja odgovara stranici paralelograma koji obrazuju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ;

- Odrediti zapreminu paralelopipeda koji obrazuju vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ ;
- Odrediti jednačinu ravni koja je paralelna sa ravni koju obrazuju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i koja sadrži tačku  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

## Određeni integral u dinamičkom okruženju

### –Definicija određenog integrala

Neka je funkcija  $f$  pozitivna na interval  $[a, b]$ , što znači da se njen grafik nalazi iznad  $x$  –ose. Tada se ravna figura ograničena intervalom  $[a, b]$  na  $x$  –osi, ordinatama funkcije  $f$  u tačkama za  $x = a$ , i  $x = b$  i grafikom funkcije  $f$  nad intervalom  $[a, b]$ , naziva krivolinijski trapez nad  $[a, b]$ .

Problem određivanja površine  $P$  krivolinijskog trapeza doveo je do definicije određenog integrala.

Neka je data neprekidna funkcija  $f$  na intervalu  $[a, b]$ . Izvršimo podelu intervala  $[a, b]$  na  $n$  podintervala tako da važi  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Obeležimo dužinu  $i$  –tog intervala sa  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , i  $\Delta x = \max_i \Delta x_i$  i neka su  $c_i$  neke tačke iz odgovarajućeg podintervala  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

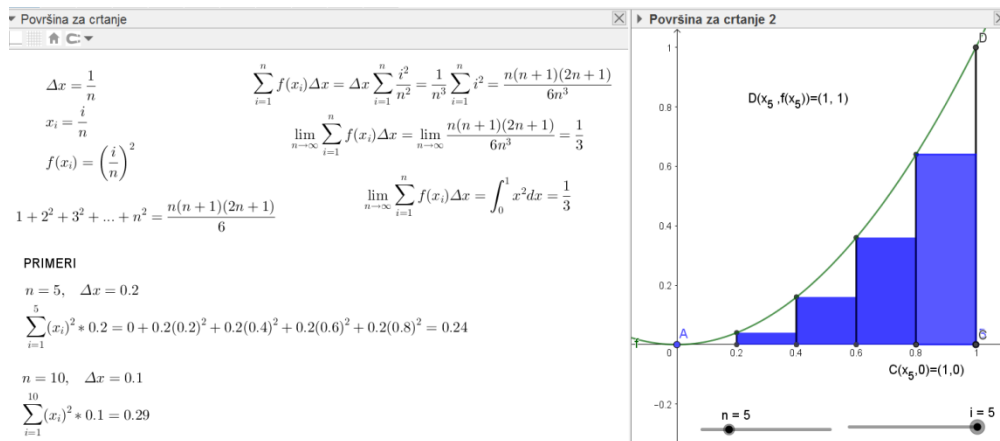
za svaku podelu intervala  $[a, b]$  i svaki izbor od  $n$  tačaka  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , tada ona definiše Rimanov integral (određeni integral) funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i := \int_a^b f(x) dx,$$

Posmatrani zbir zove se Rimanova suma. Često se ona zove gornja ili donja integralna suma, ako u tačkama  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , funkcija dostiže maksimum ili minimum na odgovarajućim podintervalima, respektivno.

Na [Slici 7](#), prikazuje se aplet [TECOMP-Uvod-Integral](#). Na levoj površini za crtanje je po definiciji izračunata površina krivolinijskog trapeza ograničenog funkcijom  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[0, 1]$ , i vizualno pokazano da je ona jednaka određenom integralu:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$



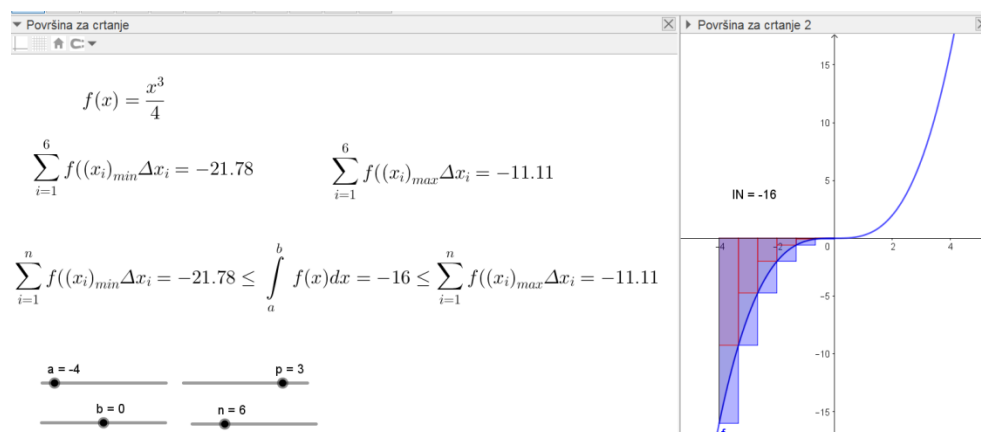
Slika 7.

Na istom apletu mogu se odrediti i odgovarajući opisani pravougaonici, kao i zbirovih gornjih suma. Pomeranjem klizača, može se povećavati  $n$  i pratiti približavanje gornjih i donjih suma ka vrednosti  $\frac{1}{3}$ .

Na apletu [TECOMP-Integral-definicija](#), prikazani su određeni integral, gornja i donja suma za funkciju  $f(x) = \frac{x^3}{4}$  na intervalu  $[a, b]$ . Sve vrednosti dobijene su korišćenjem paketa GeoGebra.

Aktiviranjem apleta mogu se menjati vrednosti  $a, b, n$ , kao i vrednost eksponenta  $p$  stepene funkcije. Umesto stepene funkcije može se posmatrati i bilo koja druga funkcija.

Grafička i algebarska reprezentacija na [Slici 8](#). urađene su pomoću naredbi, GornjaSuma, DonjaSuma i Integral za funkciju  $f(x) = \frac{x^3}{4}$ , na intervalu  $[-4, 0]$ , i za  $n = 8$ . Grafički su prikazani opisani i upisani pravougaonici u odgovarajući krivolinijski trapez, ali algebarska reprezentacija zbira njihovih površina nisu gornja i donja suma (jer one su negativni brojevi). Apsolutne vrednosti donjih i gornjih suma jednake su odgovarajućim zbirovima površina pravougaonika. Uporediti sa primerom na Slici 7, gde je data funkcija pozitivna na posmatranom intervalu. Može se i ovde menjati  $n$  i pratiti približavanje donje i gornje sume vrednosti određenog integrala.



Slika 8.

Na apletu [TECOM-Trap](#) prikazane su površine krivolinijskih trapeza za funkcije  $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$  i  $g(x) = x + 1$  nad intervalom  $[a, b]$  i odgovarajući određeni integrali na istom intervalu. Grafik funkcije  $g$  je prava, tako da je na datom intervalu krivolinijski trapez u stvari običan trapez, pa je tako

u stvari izvedena i formula za površinu trapeza pomoću integrala. Pomoću integrala se može izvesti i površina trougla, polukruga, polazeći od grafika funkcija  $h(x) = x$ ,  $k(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , kao i nekih drugih ravnih figura.

Površina pomoću integrala obradjena je i na [videoklipu](#).

## –Osobine određenog integrala

- Ako je  $a = b$ , tada je  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ;
- Ako je funkcija  $f$  konstanta, tj.  $f(x) = k$ ,  $x \in [a, b]$ , tada je  $\int_a^b kdx = k(b - a)$ ;
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ;
- Ako je  $f$  integrabilna funkcija na intervalu  $[a, b]$  i ako  $c \in [a, b]$ , tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Ako je  $f$  integrabilna funkcija na intervalu  $[a, b]$  i  $f(x) \geq 0$ , za sve  $x \in [a, b]$ , tada je  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$  i jednak je površini odgovarajućeg krivolinijskog trapeza.
- Ako je  $f$  integrabilna funkcija na intervalu  $[a, b]$  i  $f(x) \leq 0$ , za sve  $x \in [a, b]$ , tada je  $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ , a površina odgovarajućeg krivolinijskog trapeza jednaka je  $|\int_a^b f(x)dx|$ .
- Ako je  $f$  integrabilna funkcija na intervalu  $[a, b]$  tada je  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

Osobine određenog integrala mogu se vizualno grafički proveriti po definiciji, odnosno korišćenjem gornje i donje sume, vodeći računa o tome da sume nisu uvek jednake zbirovima površina odgovarajućih pravougaonika. Apleti na slikama 7. i 8. mogu se koristiti za vizualnu proveru osobina integrala.

Poslednja osobina se vizualno može analizirati određivanjem površine između sinusoide i  $x$  – ose, na intervalu  $[0, 2\pi]$ . Na Apletu [TECOMP-Sin](#) posmatraju se integrali

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx, \int_0^{\pi} \sin x dx, \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx, \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right|, \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx,$$

Na ovim primerima može se lepo videti da (u paketu *GeoGebra*) grafička reprezentacija na površini za crtanje 2 ne odgovara uvek i algebarskoj reprezentaciji.

Sledeće osobine određenog integrala:

- Ako su funkcije  $f$  i  $g$  integrabilne na intervalu  $[a, b]$  tada je

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

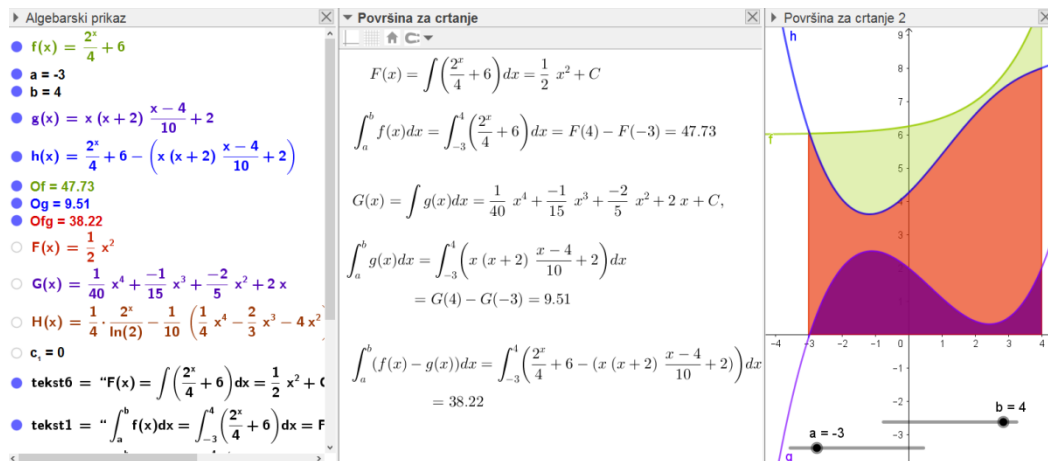
- Ako su funkcije  $f$  i  $g$  integrabilne na intervalu  $[a, b]$  i važi  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , tada je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

što se može vizualno pokazati na apletu [TECOMP-1Racun](#) (Slika 9). Na primer, za funkcije

$$f(x) = \frac{2^x}{4} + 6, \quad g(x) = \frac{x(x-2)(x-4)}{4} + 2$$

i njihovu razliku, data je algebarska i grafička reprezentacija određenih integrala u granicama od  $a$  do  $b$  pomoću *GeoGebra*. Klizačima  $a$  i  $b$  interval se može menjati na apletu, a otvaranjem algebarskog prikaza mogu se menjati i same funkcije  $f$  i  $g$ .



Slika 9.

Na apletu [TECOMP-1Racun](#) (Slika 9), pored dve površine za crtanje, dat je i algebarski prikaz sadržaja koji napravi *GeoGebra* kad se unese objekat. Na levoj površini za crtanje prikazane su verbalne i algebarske reprezentacije neodređenih i određenih integrala dobijene korišćenjem algebarskog prikaza, a na trećoj površini za crtanje data je njihova grafička reprezentacija. Pored funkcija  $f$  i  $g$  prikazana je funkcija  $h(x) = f(x) - g(x)$ , njihovi neodređeni integrali, funkcije  $F, G$  i  $H$  i odgovarajući određeni integrali označeni sa  $Of, Og, Ofg$ , na intervalu  $[a, b]$ . U algebarskom prikazu vide se njihove algebarske reprezentacije, a u površini za crtanje 2 odgovarajuće grafičke reprezentacije. Površina za crtanje (leva) korišćena je kao interaktivna tabla. Na primer, zapis „ $F(x)$ “, ili „ $\int_a^b f(x)dx$ “ uvek ostaje isti, ali promenom funkcije  $f$ , u algebarskom zapisu, istovremeno dolazi do promene podintegralne funkcije na levoj površini za crtanje, kao i odgovarajućeg grafika na površini za crtanje 2. Znači, na apletu se može pratiti istovremena promena algebarske, verbalne i grafičke reprezentacije objekata. Smatramo da studentima treba prikazivati uglavnom samo obe površine za crtanje, jer se na njima može menjati interval  $[a, b]$ , dok se za promene funkcija mora koristiti algebarski prikaz, koji se takodje može dobiti aktiviranjem apleta. Primetimo da u algebarskom prikazu *GeoGebra* nema konstante u neodređenom integralu, u stvari uzima se  $C = 0$ . Na [Slici 9](#), kružići pored funkcija  $F, G$  i  $H$  nisu obojeni, što znači da njihovi grafici nisu prikazani, ali se oni na apletu mogu prikazati, klikom na kružić.

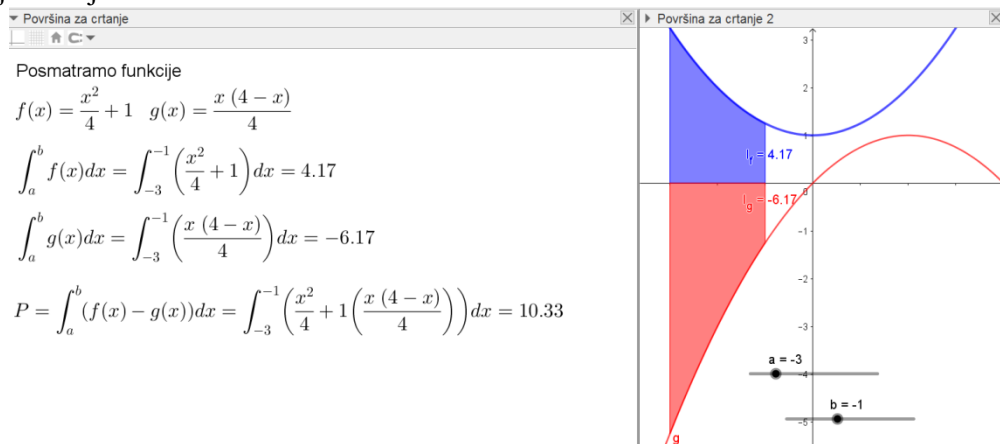
## –Površina između krivih

Ako su funkcije  $f$  i  $g$  integrabilne na intervalu  $[a, b]$  i važi  $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$ , tada se površina između njihovih grafika određuje po formuli

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Na apletu [TECOMP-Površina2](#) ([Slika 10](#)) prikazane su funkcije  $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ ,  $g(x) = x\left(\frac{4-x}{4}\right)$ ,  $g(x) \leq f(x)$ ,  $x \in R$ , svojim graficima na površini za crtanje 2, gde su takođe prikazani i krivolinijski trapezi svake od ovih funkcija na intervalu  $[a, b]$ . Algebarske reprezentacije površina tih krivolinijskih trapeza i njihova razlika prikazana je na levoj površini za crtanje. Interval  $[a, b]$  može se menjati pomoću klizača  $a$  i  $b$ . Promenom intervala  $[a, b]$  menjaju se krivolinijski trapezi i njihove površine.

Funkcija  $f$  je pozitivna na svom domenu pa će određeni integrali za proizvoljne vrednosti  $a$  i  $b$ ,  $a < b$  biti pozitivni i jednaki odgovarajućim krivolinijskim trapezima. Može se na apletu analizirati i situacija kada je  $a > b$ .



[Slika 10.](#)

Funkcija  $g$  nije istog znaka na svom domenu. Ona je pozitivna na intervalu  $[0,4]$ , a negativna van tog intervala.

Na primer, na intervalu  $[-3, -1]$  određeni integral funkcije  $f$  je 4.17 i jednak je površini odgovarajućeg krivolinijskog trapeza, a određeni integral funkcije  $g$  je  $-6.17$  i njegova apsolutna vrednost jednaka je površini odgovarajućeg krivolinijskog trapeza. Tražena površina između krivih je 10.33 i može se dobiti ili na osnovu formule ili izračunavanjem svake površine posebno.

Sledeći primeri treba da sadrže funkcije čije razlike na različitim intervalima imaju različite znake. Na primer, na apletu [TECOMP-sinCos](#) posmatrane su funkcije  $f(x) = \sin x$ , i  $g(x) = \cos x$ . Na intervalima  $[0, \pi/4]$  i  $[5\pi/4, 2\pi]$  važi  $f(x) < g(x)$ , a na intervalu  $[\pi/4, 5\pi/4]$  je  $f(x) > g(x)$  i zato je

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - g(x)) dx = 0, \quad \int_0^{\pi/4} (f(x) - g(x)) dx = \sqrt{2} - 1$$

i tako dalje. Na apletu se mogu menjati i intervali i funkcije, ali se moraju menjati i odgovarajuće algebarske reprezentacije na levoj površini za crtanje.



## –Površina u parametarskom obliku

Funkcija  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , često se može zadati i u parametarskom obliku

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in [\alpha, \beta], g, h: [\alpha, \beta] \rightarrow R,$$

pri čemu je  $g$  strogo monotona funkcija i važi da je

$$a = g(\alpha), \quad b = h(\beta), \quad y = h(g^{-1}(x)) = f(x),$$

gde je sa  $g^{-1}$  označena funkcija inverzna za funkciju  $g$ .

Ako je funkcija  $y = f(x)$  data na intervalu  $[a, b]$  u parametarskom obliku, tako da je funkcija  $g$  diferencijabilna, tada se površina krivolinijskog trapeza određena grafikom funkcije  $f$  određuje kao

$$P = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(t)g'(t)dt.$$

Parametarska jednačina krive koja se zove cikloida data je sa

$$x = a(t - \sin(t)), \quad y = a(1 - \cos(t)), \quad a > 0, \quad t \in R.$$

Parametarska jednačina astroide data je sa

$$x = a \sin^3(t), \quad y = a \cos^3(t), \quad a > 0, \quad t \in R.$$

Primitimo da su kod astroide obe funkcije  $x(t)$  i  $y(t)$  periodične sa periodom  $2\pi$  i da je dovoljno posmatrati samo interval  $[0, 2\pi]$ . Kod cikloide,  $x(t)$  nije periodična funkcija, a  $y(t)$  jeste.

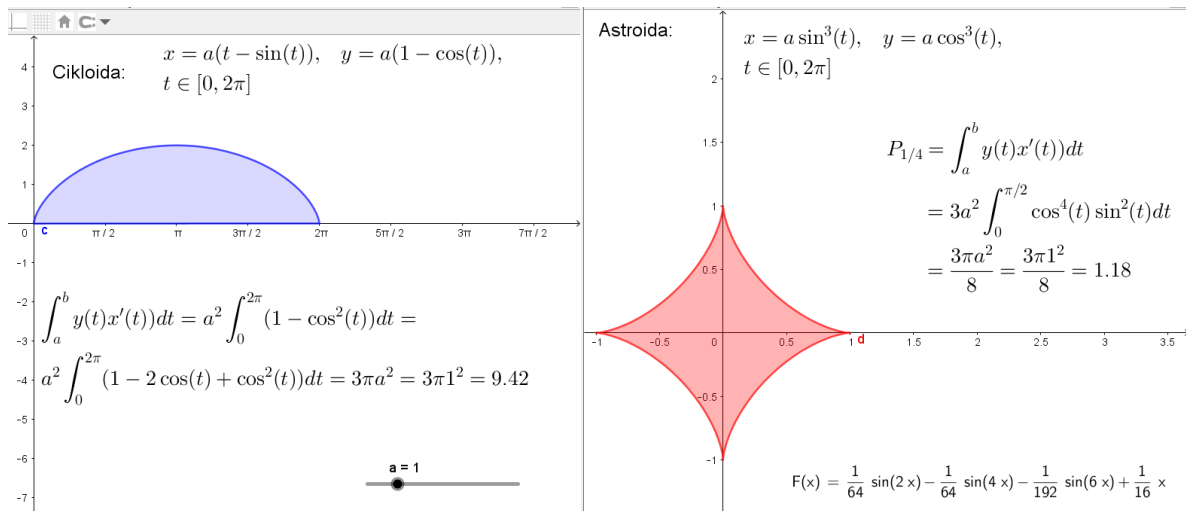
U paketu *GeoGebra* grafik funkcije date u parametarskom obliku dobija se tako što se prvo uvede parametar  $a$ , a zatim se u polje za unos unese samo „Kriva”. Tada se pojavi forma za unos:

„Kriva( <izraz>, <izraz>, <parametar>, <početna vrednost>, <krajnja vrednost> )”,

gde na mestima gde piše „izraz” treba uneti funkcije  $x$  i  $y$ .

Konkretno za cikloidu se unosi „Kriva(  $a(t - \sin(t))$ ,  $a(1 - \cos(t))$ ,  $t$ ,  $0$ ,  $2\pi$  )”.

Na apletu [TECOMP-Cikloida-Astroida](#) (Slika 11) prikazani su grafici cikloide na intervalu  $[0, 2\pi]$  i astroide, izračunata je površina koju cikloida zaklapa sa  $x$ -osom, kao i površina figure koju obrazuje astroida. Račun za cikloidu izveden je ručno, a za astroidu je korišćen neodređeni integral  $F(x)$ , dobijen pomoću *GeoGebra* i zato funkcija  $F$  zavisi od  $x$ , a ne od  $t$ , što je prikazano u donjem delu površine za crtanje. Program *GeoGebra* prepoznaje samo funkciju sa promenljivom  $x$ .



Slika 11.

## –Površina u polarnim koordinatama

Neka je u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu sa  $O$  označen koordinatni početak i neka je  $A(x, y) \neq O(0,0)$  tačka u  $xy$  –ravni. Označimo sa  $r$  rastojanje tačke  $A$  od koordinatnog početka, a sa  $\alpha$  ugao između  $OA$  i pozitivnog smera  $x$  –ose. Tako određeni brojevi  $\alpha$  i  $r$  nazivaju se polarne koordinate tačke  $A$ . Veza između polarnih i Dekartovih koordinata data je relacijama

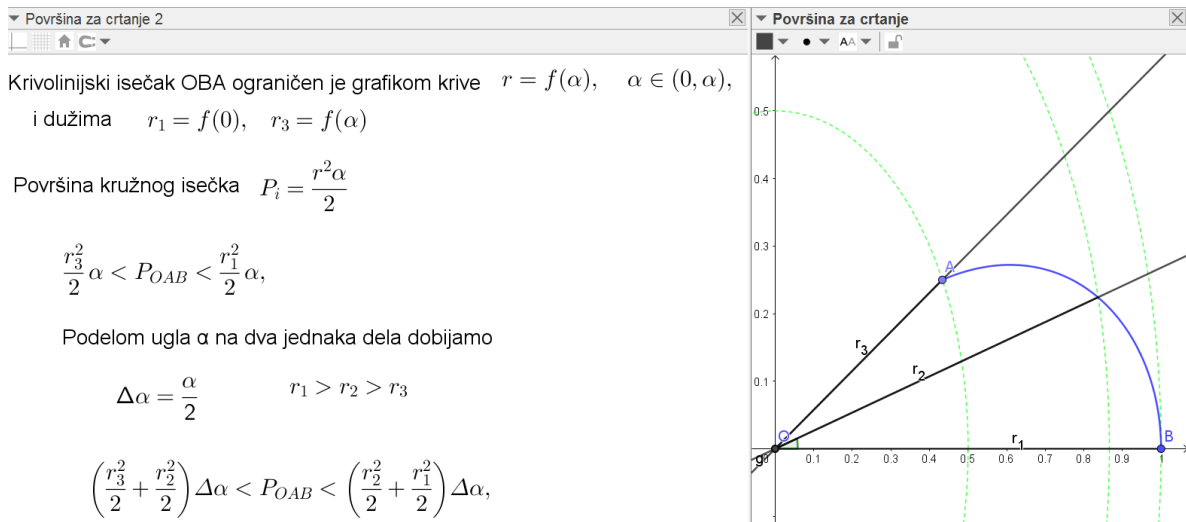
$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha.$$

Dakle, tačka  $A$  u Dekartovom koordinatnom sistemu određena je pravouglim koordinatama  $x$  i  $y$  i polarnim koordinatama  $r$  i  $\alpha$ . Pomoću polarnih koordinata mogu se zadavati funkcije tako što će biti data veza između  $r$  i  $\alpha$ ,  $r = f(\alpha)$ , gde je  $f: (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow R_+ \cup \{0\}$ .

Ravna figura ograničena pravim linijama  $\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$  i krivom koja je data u polarnim koordinatama  $r = f(\alpha)$ , naziva se krivolinijski isečak.

Na apletu [TECOMP-Polarnekoordinate](#) (Slika 12) prikazan je krivolinijski isečak  $OBA$  ograničen grafikom krive  $r = f(\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, \alpha)$ , i dužima  $r_1 = f(0), r_3 = f(\alpha)$ , koji je smešten između dva kružna isečka poluprečnika  $r_1$  i  $r_3$  i centralnog ugla  $\alpha$ . Posmatramo kružni isečak upisan u krivolinijski trapez, poluprečnika  $r_3$  i kružni isečak opisan oko njega poluprečnika  $r_1$ , sa istim centralnim uglom.

Površina kružnog isečka izračunava se  $P_i = \frac{r^2}{2} \alpha$ , ako je  $r$  poluprečnik, a ugao  $\alpha$  dat u radianima. Površina krivolinijskog isečka  $OBA$  veća je od površine upisanog kružnog isečka a manja od površine opisanog kružnog isečka. Dalje se vrši podela ugla  $\alpha$  na uglove  $\alpha_i, i = 0,1,2, \dots, n$ , i važi  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \alpha$ , koji mogu biti iste ili različite veličine. Za svaki ugao formira se upisani i opisani kružni isečak za odgovarajući krivolinijski isečak. Površina krivolinijskog isečka veća je od zbira površina upisanih kružnih isečaka, a manja od zbira površina opisanih kružnih isečaka. Ako je funkcija  $f$  rastuća, i podela ekvidistantna tada je  $\Delta\alpha = \alpha/n$ , tada važi



Slika 12.

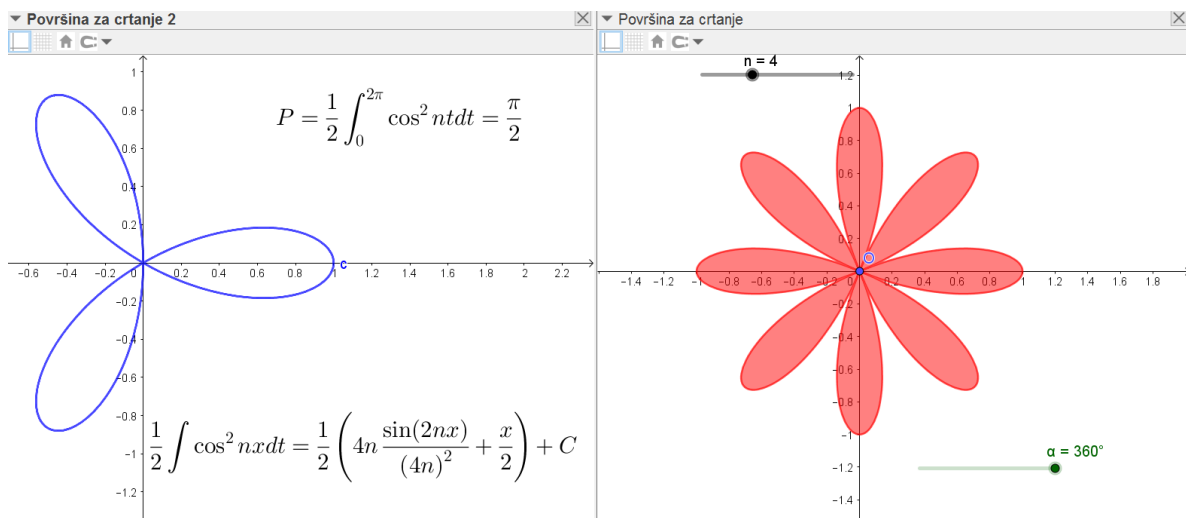
$$\sum_{i=1}^n \frac{f^2(\alpha_{i-1})}{2} \Delta\alpha < P_{OBA} < \sum_{i=1}^n \frac{f^2(\alpha_i)}{2} \Delta\alpha$$

Ako postoje granične vrednosti, kada  $n \rightarrow \infty$  (dužina  $\max_i \Delta\alpha_i \rightarrow 0$ , gde je  $\Delta\alpha_i = |\alpha_i - \alpha_{i-1}|, i = 1, 2, \dots, n$ ) suma u gornjoj relaciji tada ona definiše

$$P = \frac{1}{2} \int_0^\alpha f^2(\alpha) d\alpha$$

koji je jednak površini odgovarajućeg krivolinijskog isečka.

Na apletu [TECOMP-cvet](#) (Slika 13) prikazane su krive  $r = \cos n\alpha$ , za  $n = 3$  i  $n = 4$ . Dat je i klizač  $n$  koji nam omogućava da menjamo  $n$  i dobijamo cvetove sa različitim brojem latica. Površina svakog cveta je ista. Na levoj površini za crtanje izračunat je i neodređen integral za funkciju  $h(x) = \cos^2 nx$ , pomnožen sa  $1/2$ . Vidi se da je odgovarajući određen integral nad intervalom  $[0, 2\pi]$  jednak  $\pi/2$ .



Slika 13.

Prilikom unosa krive date u polarnim koordinatama u *GeoGebra*, moramo na mestima gde piše „izraz”

„*Kriva( <izraz>, <izraz>, <parametar>, <početna vrednost>, <krajnja vrednost> )*”;

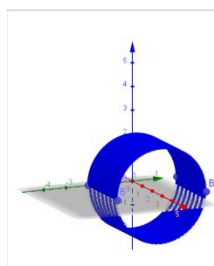
uneti koordinate  $x(r, \alpha), y(r, \alpha)$ . Konkretno, za krivu  $r = \cos n\alpha$ , unosimo

„*Kriva( cos n\alpha cos \alpha , sin n\alpha sin \alpha , t, 0 , 2\pi )*”.

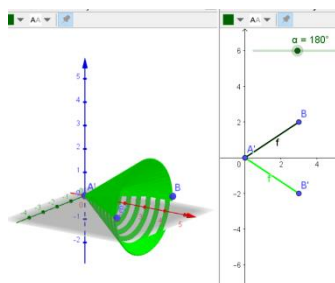
## –Zapremina obrtnih tela

U cilju boljeg razumevanja obrtnih tela predlažemo da studentima prvo nacrtamo valjak, kupu i zarubljenu kupu u *GeoGebra*, kao na slikama 14. Obrtno telo, u paketu *GeoGebra*, nastaje tako što se kriva koja se nalazi u jednoj ravni (na primer  $xy$ ) prvo rotira oko jedne od osa (najčešće  $x$  –ose) za ugao  $\alpha$  (koji je dat svojim klizačem). Tako se dobija nova kriva, kojoj se uključi trag, pa ona, pomeranjem klizača, iscrtava obrtno telo. Na slici 14 svaka od slika sadrži površine za crtanje 2D i 3D. Na površinama 2D prikazani su: duž paralelna sa  $x$  –osom, duž koja polazi iz koordinatnog početka i proizvoljna duž, dok su na površinama za crtanje 3D prikazani cilindar, kupa i zarubljena kupa, re-spektivno, odnosno tela koja nastaju njihovom rotacijom oko  $x$  –ose. Primitimo da tačke  $A'$  i  $B'$  na sve tri slike na Slici 14. nastaju rotacijom duži  $AB$  za  $180^\circ$  i samo za taj ugao se one vide u 2D grafičkom prikazu.

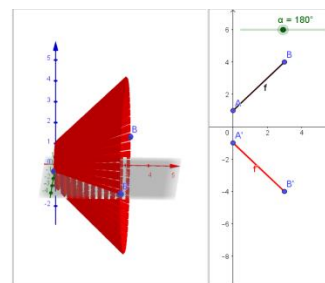
Na apletu [TECOMP-ZarKupa](#) prikazana je zarubljena kupa. Dat je i algebarski prikaz tako da se jednostavno može napraviti valjak ili kupa, promenom koordinata tačaka  $A$  i  $B$ .



Slika 14. a)



Slika 14. b)



Slika 14. c)

Formulu za zapreminu obrtnog tela koje nastaje rotacijom krivolinijskog trapeze (određenom neprekidnom funkcijom  $y = f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ ), oko  $x$  – ose, dobijamo tako što prvo izvršimo podelu intervala  $[a, b]$  na  $n$  podintervala  $\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Za svaki od podintervala odredimo opisani i upisani pravougaonik. Rotacijom pravougaonika oko  $x$  –ose nastaje valjak čija je visina jednaka  $\Delta x_i$ , a poluprečnik osnove jednak  $f(x_{i,min})$  ili  $f(x_{i,max})$ . Zapremina takvog valjka je  $V_i = \pi f^2(c_i)\Delta x_i$ ,  $c_i \in \Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Ako sa  $V$  označimo zapreminu posmatranog obrtnog tela tada važi:

$$\pi \sum_{i=1}^n f^2(x_{i,min}) \Delta x_i < V < \pi \sum_{i=1}^n f^2(x_{i,max}) \Delta x_i$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{i=1}^n f^2(c_i) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx = V,$$

ako granična vrednost gornjih suma postoji za svaku poddelu intervala  $[a, b]$  i svaki izbor od  $n$  tačaka  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Primitimo da je podintegralna funkcija pozitivna pa će i vrednost određenog integrala biti pozitivna.

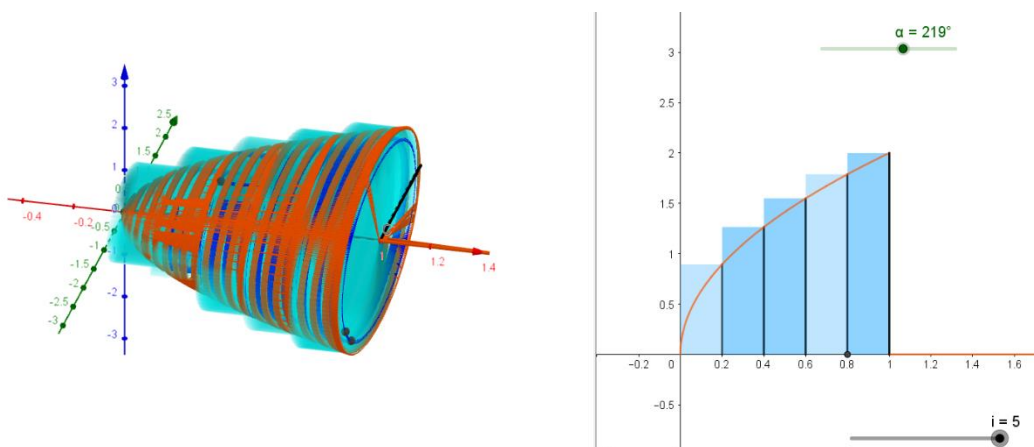
Napomena, ako se rotacija vrši oko  $x$  –ose, posmatraju se intervali na  $x$  –osi, a ako se rotacija vrši oko  $y$  –ose, tada se intervali posmatraju na  $y$  –osi.

Na apletu [TECOM-ZapreminaInt](#) na [Slici 15](#). posmatrana je funkcija  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Grafik funkcije  $f$  obrće se oko  $x$  –ose i formira obrtno telo. Zapremina tela je

$$V = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi.$$

Interval  $[0, 1]$  na  $x$  –osi podeljen je na 5 podintervala jednake dužine  $\Delta x = 0.2$ . Na [Slici 15](#). obrtno telo (oko  $x$  –ose) prikazano je narandžastom bojom, opisani cilindri nad svakim od podintervala obojeni su plavom bojom. Na ovom primeru može se jednostavno pokazati da je zbir površina opisanih cilindara

$$V_0 = 4\pi(0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + 1)0.2 = 2.4\pi.$$



[Slika 15](#).

Na apletu se mogu posmatrati i upisani cilindri nad odgovarajućim intervalima i zbir njihovih površina:

$$V_0 = 4\pi(0 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + .8)0.2 = 1.6\pi.$$

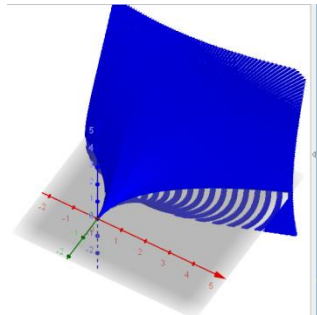
Ako se grafik funkcije  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  obrće oko  $y$  –ose dobija se telo čija se zapremina određuje kao

$$V = \pi \int_c^d (f^{-1})^2(y) dy, \quad c = f(a), \quad d = f(b)$$

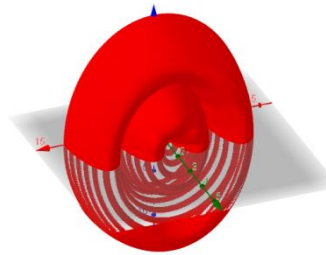
$f^{-1}$  je inverzna funkcija za funkciju  $f$ .

Ako je data funkcija  $f(x) = 2\sqrt{x}, x \in [0,1]$ , tada je  $f^{-1}(y) = \frac{y^2}{4}, y \in [0,2]$ , inverzna funkcija za funkciju  $f$ , pa je zapremina tela koje nastaje obrtanjem grafika funkcije  $f$  oko  $y$ -ose jednaka

$$V = \pi \int_c^d (f^{-1})^2(y) dy = \pi \int_0^2 \frac{y^4}{16} dy = \pi \frac{y^5}{80} \Big|_0^2 = \pi \frac{8}{25}.$$



Slika 16. a)



Slika 16. b)

Na slikama [16. a](#), [16. b](#) prikazana su obrtna tela koja nastaju rotacijom grafika  $f(x) = 2\sqrt{x}$ , cikloide u parametarskom obliku oko  $y$ -ose.

Zapremina tela koje nastaje obrtanjem cikloide  $((t - \sin(t)), (1 - \cos(t)))$  oko  $y$ -ose  $t \in [0, \pi]$ .

$$V = \pi \int_0^\pi (t - \sin t)^2 \sin t dt = 2.27.$$

Podintegralna funkcija pozitivna je na intervalu  $[0, \pi]$ . Telo na slici [16. b](#) nastalo je obrtanjem cikloide za  $t \in [0, 4\pi]$ , a njegova zapremina određena je na apletu [Zap-cikloida-y-osa](#).

## –Dužina luka krive

Dužina  $s$  ([Slika 17.](#)) grafika neprekidne funkcije  $y = f(x)$  nad intervalom  $[a, b]$  (na  $x$ -osi) određuje se pomoću tetive koja spaja tačke  $(a, f(a)), (b, f(b))$  koju označavamo sa  $g$ . Važi:

$$g^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right) (\Delta x)^2, \quad g = \sqrt{\left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)} \Delta x.$$

Deobom intervala  $[a, b]$  na  $n$  podintervala,  $\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , dobijamo odgovarajuće podintervale vrednosti funkcije  $\Delta y_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Ako  $n$  teži beskonačnosti i dužina najvećeg intervala teži nuli i tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(x_i), \quad x_i \in \Delta x_i,$$

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = s.$$

Na primer, dužina luka grafika funkcije  $f(x) = 2\sqrt{x}, (f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}})$  na intervalu  $[0.25, 4]$  je:

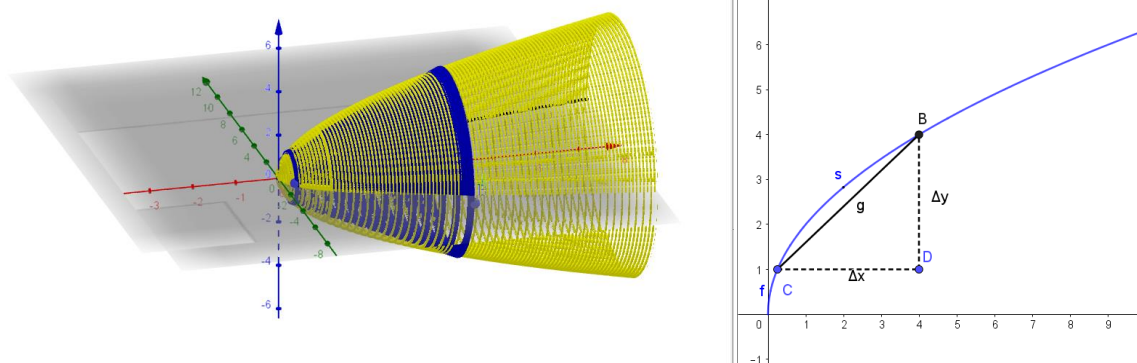
$$s = \int_{.25}^4 \sqrt{1 + 1/x} dx = 4.88.$$

Integral  $\int_{.25}^4 \sqrt{1 + 1/x} dx$  se rešava tako što se smenom  $\sqrt{1 + 1/x} = t^2$  podintegralna funkcija svodi na racionalnu funkciju. Funkcija  $f^{-1}(y) = \frac{y^2}{4}$ ,  $y \in [1,4]$  je inverzna za funkciju  $f$  na intervalu  $[0.25,4]$ . Dužina luka  $f^{-1}$ , na intervalu  $[1,4]$  po  $y$ -osi je

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + (f^{-1}(y))'}^2 dy = \int_1^4 \sqrt{1 + (y/2)^2} dy = 4.88$$

ista vrednost bez obzira po kojoj osi se integriše.

Predložimo da se odredi površina kruga, kao dužina luka kružnice pomoću integrala.



Slika 17.

## –Površina obrtnih tela

U cilju određivanja površine obrtnog tela, koje nastaje rotacijom krivolinijskog trapeza (određenog neprekidnom funkcijom  $y = f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  na  $x$ -osi) oko  $x$ -ose, posmatračemo obrtno telo koje nastaje rotacijom duži koja spaja krajnje tačke krive na krivolinijskom trapezu. Na [slici 17](#) to je duž BC, pa se njenom rotacijom dobija omotač zarubljene kupe. Površina omotača zarubljene kupe je  $P = \pi(r_1 + r_2)s$ , gde su  $r_1, r_2$  poluprečnici osnove, a  $s$  je izvodnica kupe. Ovde je  $r_1 = f(a), r_2 = f(b)$ , a  $s$  dužina luka grafika funkcije  $f$ .

Na Apletu [TECOMP-površinaObrtnih tela](#) prikazano je telo koje nastaje rotacijom grafika funkcije  $f(x) = 2\sqrt{x}$ , u žutoj boji i unutar tog tela se nazire upisana zarubljena kupa. Grafik u 3D se može okretati da se bolje uoči upisana zarubljena kupa.

Delimo interval  $[a, b]$  na  $n$  podintervala  $\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$  i nad svakim od podintervala obrćemo i grafik funkcije, kao i duž koja spaja krajnje tačke grafika nad datim intervalom. Tako dobijamo niz zbrova površina zarubljenih kupa čija granična vrednost, ako postoji nezavisno od podele i ako dužina najvećeg intervala teži nuli, jeste jednaka površini omotača odgovarajućeg obrtnog tela:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{\left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)} \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = P_0$$

Ako se grafik funkcije  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $x \in [0.25, 4]$ , obrće oko  $x$ -ose dobija se telo čija je površina

$$P_0 = 2\pi \int_{0.25}^4 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_{0.25}^4 \sqrt{1+x} dx = 4\pi \frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{0.25}^4 = 26.8\pi.$$

Površina tela koje nastaje obrtanjem grafika iste funkcije oko  $y$ -ose dobija se iz (analogno se izvodi kao i prethodna)

$$P_0 = 2\pi \int_a^b f^{-1}(y) \sqrt{1 + ((f^{-1})'(y))^2} dx = 2\pi \int_1^4 \frac{y^2}{4} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy = 19,22\pi$$

Integral  $\int \frac{y^2}{4} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy$  se rešava metodom Ostogradskog, a može se dobiti i pomoću programskog paketa *GeoGebra*.

Na Apletu [TECOMP-Torus \(Slika 18\)](#) prikazan je torus koji nastaje rotacijom kružnice  $x^2 + (y - a)^2 = r^2$  oko  $x$ -ose.

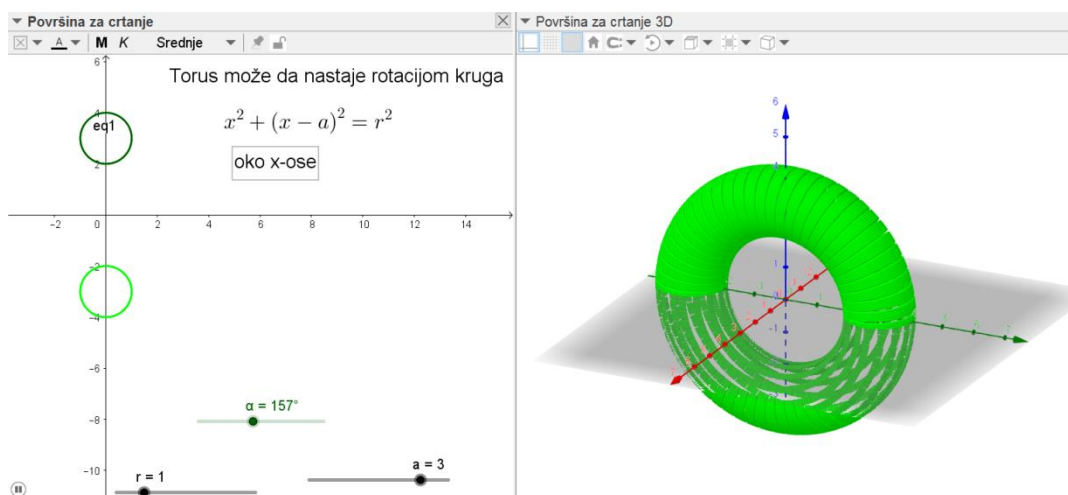
Zapremina torusa dobija se kao razlika dve zapremine tela koje nastaju obrtanjem krivih oko  $x$ -ose

$$y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2} \text{ i } y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^r (y_1^2 - y_2^2) dx = 4a\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2ar^2\pi^2.$$

Površina torusa dobija se kao zbir dve površine koje nastaju obrtanjem krivih  $y_1, y_2$ . Na osnovu  $y'_{1,2} = \pm \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$  imamo

$$P = 2\pi \int_{-r}^r (y_1^2 \sqrt{1 + (y_1')^2} + y_2^2 \sqrt{1 + (y_2')^2}) dx = 4\pi^2 r.$$



Slika 18

Na apletu [TECOMP-EliHip](#) prikazana su tela (elipsoidi i hiperboloidi) u 3D površini za crtanje koja nastaju obrtanjem krive  $ax^2 + by^2 = ab$ , u zavisnosti od parametara  $a$  i  $b$ . Ako je  $a = b$  dobija se lopta, (aplet [Tecomplopta](#)) pa predložimo da se odredi površina i zapremina lopte.



## Literatura

1. Anthony, B., Jr, Kamaludin, A., Romli, A., Raffei, A., F., M., Eh Phon, D., N., A., L., Abdullah, A., Ming, G., L., (2020), Blended Learning Adoption and Implementation in Higher Education: A Theoretical and Systematic Review, *Technology, Knowledge and Learning*, <https://doi.org/10.1007/s10758-020-09477-z>
2. Graham, C. R. (2013). Emerging practice and research in blended learning. *Handbook of Distance Education*, 3, 333–350.
3. Hadžić, O., Takači, Đ., (1998), Matematika za studente prirodnih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad.
4. Hadžić, O., Takači, Đ., (2000), Matematičke metode, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad.
5. Mortenson, M., (2020), Vectors and Matrices for Geometric and 3D Modeling, Industrial press inc. <http://www.springerlink.com/index/N423R5P1011388J1.pdf>
6. Sarah Guri-Rosenblit, Distance education' and 'e-learning': Not the same thing, (2005), *Higher Education* 49: 467–493
7. Radenović, S., Takači, Đ., (2002), Matematika 1 – za inženjere, Akademska misao, Beograd.
8. Abrahamson, C. E. (1998). Issues in interactive communication in distance education. *College Student Journal*, 32(1), 33 – 43.
9. Laurillard, D. (1993) *Rethinking University Teaching: A Framework for the Effective Use of Educational Technology*, Routledge/Falmer, London.

**Autor:**  
**Sana Stojanović Đurđević**



## **Dokazivač teorema Isabelle u nastavi prirodno-matematičkih nauka**

**Najkraći put od matematičke  
logike do formalne verifikacije  
smanjenja složenosti programa**

PITANJA:

Šta je interaktivno dokazivanje teorema?

Zašto Isabelle?

Matematička logika i Isabelle?

Programiranje i Isabelle?

## Sadržaj

<u>Uvod u interaktivno dokazivanje teorema</u> .....	130
<u>Dokazivanje teorema uz pomoć računara</u> .....	131
<u>Istorijat Isabelle</u> .....	133
<u>Instalacija i pokretanje Isabelle/HOL</u> .....	133
<u>Primer teorije u Isabelle/HOL</u> .....	134
<u>Sintaksa jezika Isabelle/HOL</u> .....	135
<u>Osnovni pojmovi</u> .....	136
<u>Zapisivanje formula u Isabelle/HOL</u> .....	137
<u>Primer ispitnih zadataka</u> .....	138



## Uvod u interaktivno dokazivanje teorema

Materijal koji je pred vama nastao je na osnovu knjige „Uvod u interaktivno dokazivanje teorema”, napisane od strane autora ovog trening materijala u saradnji sa Filipom Marićem. Predmet Uvod u interaktivno dokazivanje teorema drži se na IV godini smera Informatika i Računarstvo i informatika na Matematičkom fakultetu (kao izborni kurs). Predmet se drži tek treću godinu zaredom (počevši od školske 2018/2019).

Iako je interaktivno dokazivanje moguće prikazati korišćenjem raznih dokazivača, tokom kursa se koristi isključivo interaktivni dokazivač teorema Isabelle/HOL. Jedan od razloga za ovaj izbor je to što Isabelle/HOL kroz svoju veoma bogatu notaciju i sintaksu i deklarativan jezik za zapis dokaza čini dokazivanje u njemu donekle bliskim klasičnoj matematici, koja je poznata kako studentima, tako i matematičarima i programerima. Dodatno, Isabelle/HOL nudi i bogatu podršku za funkcionalno programiranje i formalnu verifikaciju softvera.

Knjiga Uvod u interaktivno dokazivanje teorema kreirana je u okviru samog interaktivnog dokazivača Isabelle. Sva poglavlja su Isabelle/HOL teorije, koje sadrže definicije, leme, i njihove dokaze i mogu se pojedinačno učitati i pokrenuti, tj. proveriti u dokazivaču Isabelle. Ovakav pristup kreiranju materijala bio je veoma zahtevan za autore i posebna pažnja posvećena je usklađivanju kôda koji se prevodi u Isabelle sa tekstom kojim opisujemo njegovo značenje. Ovakav način kreiranja knjige nudi čitaocu jedinstvenu mogućnost da sam testira postojeći materijal (bez pojedinačnog prekucavanja i izdvajanja delova kôda koji ga zanima), da direktno iz njega uči, da ga dopunjuje, menja i savladava korak po korak od početnog poglavlja.

Trenutna verzija knjige elektronski je dostupna sa naredne internet adrese: <http://poincare.matf.bg.ac.rs/~sana/uidt/uidt.pdf>. Nadamo se da će time biti omogućen pristup širem skupu čitalaca i eventualno dovesti do veće popularnosti korišćenja računara u svrhu dokazivanja teorema i formalne verifikacije softvera.

Elektronski materijali, koji se mogu koristiti da korisnik samostalno izgeneriše PDF verziju knjige na osnovu izvornog Isabelle/HOL koda, nalaze se na istoj adresi. Elektronski materijal je podeljen po poglavljima i dostupan je kako u Isabelle *thy* formatu, tako i u *htm* formatu. Iz tog razloga mali deo knjige posvećen je i kreiranju izlaznih dokumenata na osnovu unapred kreirane teorije.

## Dokazivanje teorema uz pomoć računara

Dokazivanje teorema uz pomoć računara inicijalno se razvijalo u pravcu *automatskog dokazivanja teorema*. Problem dokazivanja određene teoreme sastojao se u formulisanju tvrđenja u jeziku korišćenog programa za dokazivanje teorema i prepuštanje tom dokazivaču da potvrdi ili opovrgne da li je dato tvrđenje teorema unutar nekog fiksiranog formalnog sistema. Najčešće je izlaz dobijen od dokazivača nakon izvršavanja bio veoma ograničen, često je sadržao samo *da/ne* odgovor, tako da korisnik nije mogao da dobije mnogo informacija o samom dokazu tvrđenja. Automatsko dokazivanje teorema veoma se uspešno primenjuje u mnogim specijalizovanim matematičkim teorijama. Na primer, automatski dokazivači specijalizovani za iskaznu logiku uspešno se koriste u verifikaciji hardvera, jer su u stanju da rezonuju o formulama koje imaju stotine hiljada promenljivih i milione ograničenja. Automatski dokazivači teorema za geometriju zasnovani su na svođenju na analitičku geometriju i na algebrizaciji geometrijskih tvrđenja i u stanju su da uspešno dokažu pregršt komplikovanih geometrijskih tvrđenja.

Ipak, automatsko dokazivanje teorema veoma je izazovno i čak ni najsavremeniji automatski dokazivači nisu u stanju da potpuno samostalno, bez ljudskog navođenja dokazuju kompleksne teoreme iskazane u bogatim matematičkim teorijama. Stoga se poslednjih nekoliko decenija uz automatsko dokazivanje, sve više koristi i *interaktivno dokazivanje teorema*, koje podrazumeva saradnju između čoveka i računara u procesu dokazivanja. Čovek zapisuje dokaz u specijalizovanom jeziku, prepustajući

računaru da samostalno pronađe jednostavnije korake u dokazu. Dakle, za razliku od procesa automatskog dokazivanja teorema, gde je korisnik nakon formulisanja teoreme samo posmatrač, dok dokazivač sam dokazuje teoremu i generiše izlaz u određenom formatu, proces interaktivnog dokazivanja teorema u mnogo većoj meri zavisi od korisnika. Korisnik sam formuliše i unosi glavne korake dokaza, a računar proverava da li je uneti dokaz formalno ispravan, dopunjujući automatski jednostavnije, nedostajuće delove.

Neki od najčešće korišćenih interaktivnih dokazivača teorema danas su:

- Isabelle (<http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/Isabelle/>)
- Coq (<http://coq.inria.fr/>)
- Lean (<https://leanprover.github.io/>)
- Mizar (<http://www.mizar.org/>)
- HOL-Light (<http://www.cl.cam.ac.uk/~jrh13/hol-light/>).

Danas je česta saradnja između tradicionalnih automatskih i interaktivnih dokazivača i interaktivni dokazivači imaju mogućnost korišćenja nekih automatskih dokazivača. Naime, iako automatski dokazivači najčešće ne generišu kompletan formalni dokaz, oni mogu da daju informacije o skupu aksioma i pomoćnih lema koje su korišćene tokom dokazivanja, koje interaktivni dokazivač može iskoristiti da rekonstruiše i proveriti celokupan formalni dokaz.

Interaktivni dokazivači teorema smatraju se mnogo pouzdanijim od tradicionalnih automatskih dokazivača, jer insistiraju na tome da se svaki dokaz izvede potpuno detaljno u zadatom formalnom sistemu. U krajnoj instanci (koja može biti sakrivena od korisnika) svaki dokaz se izražava u obliku primena osnovnih aksioma i pravila izvođenja i tzv. *pouzdan jezgro dokazivača* (engl. *trusted core*) proverava korektnost svakog dokaza. Dokaz se prihvata isključivo ako ga pouzdano jezgro uspešno proveriti. Obratimo pažnju na to da sve napredne komponente interaktivnog dokazivača koje pronalaze dokaze ne moraju biti verifikovane, jer ako one sadrže neku grešku i pronađu dokaz koji nije ispravan, pouzdano jezgro će to uočiti i takav dokaz će biti odbačen.

Otkrivanje grešaka u matematičkim dokazima, u udžbenicima i u objavljenim radovima, i u programima koji se koriste u životno ključnim situacijama, dovelo je do potrebe za mašinski proverivim dokazima teorema i formalnom verifikacijom napisanih programa. Osim primene u obrazovanju i u industriji, interaktivni dokazivači teorema značajno doprinose i očuvanju bogatog matematičkog nasleđa kroz formalizaciju bitnih matematičkih dela.

Dva najčešće korišćena pristupa koja se koriste prilikom interaktivnog dokazivanja teorema su proceduralni i deklarativni pristup. *Proceduralni pristup* intenzivno koristi automatske alate ili taktike sa zadatkom pojednostavljivanja trenutnog cilja teoreme. Pažljivim kombinovanjem taktika cilj teoreme se pojednostavljuje dok se ne dođe do pretpostavki teoreme, kada možemo reći da je dokaz završen. Dakle, u ovom pristupu, dokaz se sastoji od niza poziva taktika koje transformišu teoremu koja se dokazuje i svode je na jednostavnija tvrđenja. Prilikom korišćenja *deklarativnog pristupa*, dokaz se zapisuje na jeziku koji podseća na standardni tekst koji se javlja u matematičkim udžbenicima, zahvaljujući čemu su dobijeni dokazi nalik dokazima iz matematičkih udžbenika i po strukturi i po sintaksi. Deklarativni dokazi su zbog toga pristupačniji prosečnom matematičaru i studentu, za razliku od proceduralnih dokaza koji zahtevaju malo veće poznavanje jezika nad kojim su napisani.

## –Istorijat Isabelle

Interaktivni dokazivač teorema Isabelle razvija se od sredine 1980-ih godina. Kao najznačajniji autori, sa najviše doprinosa, ističu se Lari Polson (eng. *Larry Paulson*) sa Univerziteta u Kembridžu i Tobijas Nipkov (eng. *Tobias Nipkow*) i Markus Vencel (nem. *Markus Wenzel*) sa Tehničkog univerziteta u Minhenu. Isabelle je u određenoj meri zasnovan na dokazivaču LCF i može se reći da prati LCF pristup (eng. *LCF approach*) kako bi se obezbedila korektnost sistema (on podrazumeva postojanje proverenog jezgra i specifičnu upotrebu funkcionalnog programskog jezika kojom se obezbeđuje pouzdana provera dokaza bez potrebe da ceo dokaz bude eksplicitno konstruisan i smešten u memoriju računara).

Isabelle je generički dokazivač i omogućava rad sa različitim formalnim sistemima (tzv. objektivnim logikama). U okviru Isabelle implementirana je *meta-logika* koja se naziva Isabelle/Pure u okviru koje se definišu različite objektivne logike. Isabelle podržava više objektivnih logika među kojima su najznačajnije:

HOL – logika višeg reda,

FOL – klasična i intuicionistička logika prvog reda,

ZF – Cermelo-Frenkelova (eng. Zermelo-Fraenkel) teorija skupova,

CTT – konstruktivna teorija tipova,

LCF – Skotova logika izračunljivih funkcija u logici prvog reda,

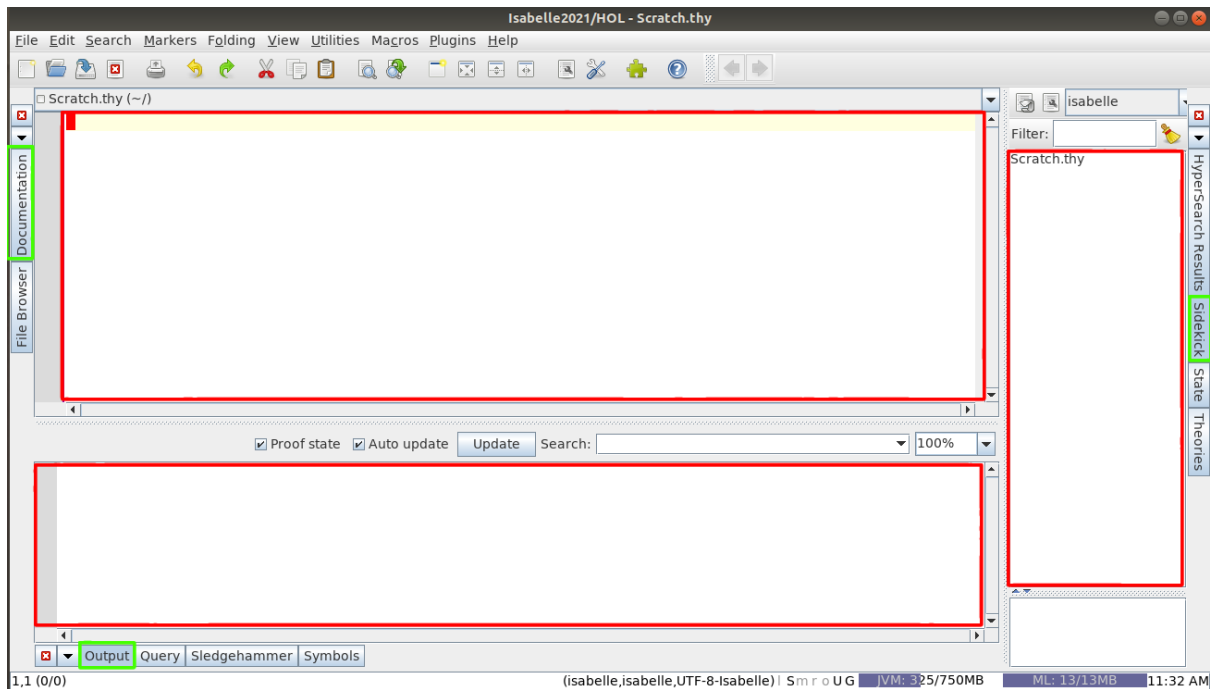
HOLCF – Skotova logika izračunljivih funkcija u logici višeg reda.

Objektivna logika sistema Isabelle, koja je ubedljivo najkorišćenija, jeste logika višeg reda (eng. *Higher Order Logic*). Verzija dokazivača Isabelle koja koristi logiku višeg reda naziva se Isabelle/HOL i ona se pojavila početkom 1990-ih. Ova verzija će biti zastupljena u ovoj knjizi. Logika višeg reda u dokazivaču Isabelle/HOL zasnovana je na tipiziranoj verziji lambda-računa (engl. *typed lambda-calculus*), ali se u ovoj knjizi nećemo baviti logičkim osnovama sistema, već samo njegovom praktičnom primenom.

Osim za dokazivanja matematičkih teorema i formalizaciju matematičkih teorija, Isabelle/HOL intenzivno se koristi i kao alat za verifikaciju programa. Naime, Isabelle/HOL nudi funkcionalni programski jezik u kom je moguće definisati funkcije koje implementiraju različite algoritme, a zatim formulisati i dokazati njihova svojstva. Na osnovu tih definicija, moguće je automatski izvesti programski kod u više funkcionalnih programskih jezika (Haskell, SML, OCaml).

## –Instalacija i pokretanje Isabelle/HOL

Program za interaktivno dokazivanje teorema Isabelle/HOL može se preuzeti sa stranice <https://isabelle.in.tum.de/>. U trenutnoj verziji knjige korišćena je verzija Isabelle2021/HOL. Na većini računara ovaj program se instalira jednostavno, ali ako postoji problem mogu se pratiti uputstva sa stranice <https://isabelle.in.tum.de/installation.html>.



Slika 1. Prozori teorija, pregled i izlaz su označeni crvenom bojom. Dugmad koja su opisana su označena zelenom bojom.

Nakon pokretanja Isabelle/HOL otvara 3 osnovna okvira koje ćemo zvati: *teorija* (gornja polovina), *pregled* (skroz desno) i *izlaz* (donja polovina). Ako okvir *izlaz* nije otvoren treba pritisnuti dugme **Output** na dnu ekrana. Ako okvir *pregled* nije otvoren treba pritisnuti dugme **Sidekick** sa desne strane.

Dodatno može se pristupiti bogatoj Isabelle/HOL dokumentaciji tako što se sa leve strane programa pritisne dugme **Documentation**. Ovoj dokumentaciji se može pristupiti i online sa adrese <http://isabelle.in.tum.de/documentation.html>, kao i iz foldera u kom je Isabelle/HOL instaliran (u podfolderu *doc*).

U okvir za *teoriju* unose se sve teorije, definicije i leme koje se dokazuju. Okvir *izlaz* prikazuje sve tekuće ciljeve programa i u svakom koraku prikazuje trenutno stanje programa. Okvir *pregled* prikazuje trenutnu strukturu dokumenta koji pišemo u okviru *teorija*.

## –Primer teorije u Isabelle/HOL

Naredni jednostavni primer ilustruje osnovne pojmove sistema Isabelle. Osnovna jedinica sadržaja u Isabelle/HOL je *teorija*. U *teoriji* se uvode definicije i formulišu se i dokazuju tvrđenja. Iako u matematici razlikujemo leme, teoreme, stavove i slično, u formalnom sistemu nema nikakve razlike između njih (sve to su tvrđenja koja se na isti način formulišu, dokazuju i kasnije koriste). Razmotrimo jedan veoma jednostavan primer *teorije*.

```
theory Sledbenik
imports Main
begin

definition sledbenik :: "nat \ $\rightarrow$  nat" where
"sledbenik x = x + 1"

lemma "sledbenik (sledbenik x) = x + 2"
unfolding sledbenik_def
by auto
```

```

lemma
assumes "x > 0 \<and> x < 3"
shows "sledbenik x > 1 \<and> sledbenik x < 4"
using assms
unfolding sledbenik_def
by auto
end

```

Nakon kopiranja ovog teksta u Isabelle i kretanjem kursorom kroz teoriju, možemo videti kako Isabelle/HOL tumači liniju na kojoj se kursor trenutno nalazi.

Da bi mogla da se prati interpretacija svake naredbe u Isabelle potrebno je sa desne strane, u delu *pregled*, selektovati dugme **Theories** i selektovati opciju **Continuous checking**. U okviru tog prozora prikazuju se sve trenutno otvorene opcije.

Dodatno, da bi se video izlaz u Isabelle/HOL sistemu potrebno je otvoriti *Output* prozor na dnu ekrana i u njemu štiklirati opciju **Proof state**.

Objašnjenje primera: Na početku je definisana funkcija *sledbenik*. Isabelle/HOL je tipizirani jezik i svi objekti imaju svoj tip. Tip ove funkcije je "*nat => nat*", što znači da je ovo funkcija koja slika prirodne brojeve u prirodne brojeve. Nakon navođenja tipa data je jednakost kojom se definiše funkcija *sledbenik*. Primitimo da se, u skladu sa praksom funkcionalnog programiranja, poziv tj. primena funkcije piše bez zagrada (umesto *sledbenik(x)*, piše se *sledbenik x*). Više reči o sintaksi biće dato u nastavku ovog poglavlja.

U nastavku su formulisane i dokazane dve leme. Formulacija prve leme je očigledna. Dokazuje se u potpunosti primenom automatskog dokazivača (koji je pozvan pomoću **by auto**). Naredbom **unfolding sledbenik\_def** postignuto je da se pre primene automatskog dokazivača primeni definicija funkcije *sledbenik*. Ovo je potrebno posebno navesti, jer automatski dokazivači po pravilu ne koriste definicije (u suprotnom bi se od teoreme koja se dokazuje veoma brzo došlo do najosnovnijih pojmova na kojima je zasnovan ceo formalni sistem i teoreme bi postale previše glomazne i komplikovane).

I naredna lema je veoma očigledna. Konstrukcijom **assumes – shows** formulisane su pretpostavka i zaključak leme. Prva lema je imala samo zaključak, pa je bilo moguće izostaviti ključnu reč **shows**, mada ne bi bila greška ni da je bila navedena. Unutar pretpostavke i unutar zaključka upotrebljen je veznik konjunkcije (o tome kako se pomoću tastature unose matematički simboli, biće reči u nastavku). Pomoću **using assms**, automatskom dokazivaču je naglašeno da prilikom dokazivanja leme koristi i pretpostavku (podrazumevano ponašanje automatskih dokazivača je to da ne pokušavaju da koriste pretpostavke sve dok ih korisnik eksplicitno ne navede).

## –Sintaksa jezika Isabelle/HOL

U Isabelle/HOL sistemu razlikujemo *unutrašnju* i *spoljašnju* sintaksu. Fiksirana sintaksa koja se koristi prilikom definisanja teorije (čiji su deo ključne reči *begin* i *datatype*) naziva se *spoljašnja sintaksa* (*eng. outer syntax*). *Unutrašnja sintaksa* (*eng. inner syntax*) definisana je samim jezikom teorije koju korisnik želi da kreira (opis teorije, njenih definicija, lema i njihovih dokaza).

**Spoljašnja sintaksa** definiše sintaksu koja se koristi prilikom pisanja svih komandi. Čine je ključne reči poput *lemma*, *datatype*, *assumes*, *proof*, *qed*, *show*, *have*, itd. i opisuje konstrukte koji su



dozvoljeni u okviru jedne teorije. Njen detaljni opis može se naći u tutorijalu "isabelle-isar-ref.pdf". Dodatno, nju čine i imena tipova (*float*, *int*, *nat*), specijalni matematički simboli kao što su  $\forall$  i  $\lambda$  (koji se u Isabelle/HOL zapisuju na uobičajen način (`\<forall>` i `\<lambda>`), naredbe za zapisivanje teksta (koji se zapisuje u okviru naredbe *text*), nevidljivi komentari (koji se zapisuju u okviru naredbe (`* *`)) i vidljivi komentari (koji se zapisuju u okviru naredbe `\<comment>`).

**Unutrašnja sintaksa** odnosi se na tekst koji se nalazi između dvostrukih navodnika. Na primer, prilikom definisanja konkretne notacije koja se koristi u željenom logičkom okviru koji korisnik razvija (nakon ključnih reči kao što su npr. *definition*, *primrec*, *datatype*).

Prilikom zapisivanja *unutrašnje sintakse* korišćenje navodnika je neophodno, osim u slučaju pojedinačnih promenljivih (na primer, "x+y" i z su dozvoljeni, ali x+y zapisano bez navodnika nije). Podrazumevano ponašanje jeste da prilikom generisanja pdf dokumenata ovi navodnici nisu vidljivi.

Prilikom prijavljivanja sintaksne greške Isabelle će ispisati *Inner syntax error* za grešku koja se javlja u okviru unutrašnje sintakse, odnosno *Outer syntax error* za grešku koja se javlja u okviru spoljašnje sintakse.

## –Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju će biti prikazani osnovni matematički pojmovi i sintaksa korišćena za njihovo zapisivanje u jeziku Isabelle/HOL. Jezik koji se koristi kreiran je u duhu duge tradicije funkcionalnog programiranja. U uvodnom primeru videli smo da je Isabelle/HOL tipiziran jezik (koristili smo tip prirodnih brojeva *nat*).

*Osnovni tipovi podataka* u jeziku Isabelle/HOL: *bool*, *nat*, *int*, *real*, *complex* odgovaraju redom: tipu logičkih vrednosti, tipu prirodnih, celih realnih i kompleksnih brojeva.

*Izvedeni tipovi podataka* kreiraju se pomoću tzv. konstruktora tipova: na primer, *list* za liste i *set* za kreiranje skupova elemenata nekog tipa. Ova dva konstruktora pišu se postfiksno, npr. lista prirodnih brojeva se zapisuje *nat list*, a skup realnih brojeva *real set*.

*Tip funkcija* zadaje se operatorom  $\Rightarrow$ . Na primer, *tipnat*  $\Rightarrow$  *real* označava niz realnih brojeva (funkciju koja svakom indeksu koji je prirodan broj pridružuje neku realnu vrednost). U situaciji kada funkcija ima više ulaznih parametara, koristi se Karijev oblik funkcije (*eng. currying*) i zapisuje se u obliku *nat*  $\Rightarrow$  *nat*  $\Rightarrow$  *real*. Ovaj oblik funkcije je fleksibilniji i ima dosta prednosti naspram zapisa *nat*  $\times$  *nat*  $\Rightarrow$  *real* koji koristi torke, od kojih je možda najbitnija ta da se dobro slaže sa principom matematičke indukcije. U Isabelle/HOL (slično kao u Haskell-u), osim kada torke nisu eksplicitno zahtevane, funkcije se uvek definišu kao Karijeve funkcije.

*Tipske promenljive* – koriste se za zapis polimorfnih funkcija, odnosno kada imamo potrebu da umesto konkretnog tipa navedemo promenljivu proizvoljnog tipa. Tipske promenljive navode se sa apostrofom ispred: 'a, 'b. Mnoge standardne funkcije definisane su kao polimorfne. Na primer, funkcija koja izračunava dužinu liste ima tip *'a list*  $\Rightarrow$  *nat*, što znači da joj je argument lista elemenata bilo kog tipa, a da joj je rezultat prirodni broj.

*Termi* se kreiraju kao u funkcionalnim programskim jezicima. Funkcija *f* tipa  $T_1 \Rightarrow T_2$  primenjena na term *t* tipa  $T_1$  kreiraće term *f t* tipa  $T_2$ . Ako želimo da naglasimo da će term *t* biti tipa  $T$  to

zapisujemo  $t :: T$ . Isabelle/HOL podržava i lambda-funkcije, čije će korišćenje biti ilustrirano u kasnijim poglavljima. Dozvoljeno je korišćenje konstanti (funkcije arnosti 0) i promenljivih kao baznih terma.

Isabelle/HOL podržava i neke od osnovnih konstrukata preuzetih iz funkcionalnih programskih jezika (ova tri konstrukta uvek se navode između običnih zagrada). *let*-izraz uvodi vrednosti promenljivima, *case*-izraz definiše vrednost u zavisnosti od oblika izraza, *if*-izraz je uslovni izraz koji predstavlja skraćenicu za *case*-izraz.

(let x1= t1x2= t2in u)

(case t of pat1 ⇒ t1 | ... | patn ⇒ tn)

(if b then t1else t2)

## –Zapisivanje formula u Isabelle/HOL

U ovom poglavlju biće prikazana osnovna Isabelle/HOL sintaksa koja se koristi za zapisivanje formula. U prvom trenutku nećemo se baviti samim dokazima zadatih tvrđenja već ćemo se osloniti na automatske dokazivače.

Formule su izrazi nad tipom *bool* sa standardnim konstantama *True* i *False* i sa uobičajenim logičkim veznicima (navedenim po rastućem prioritetu):  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ . Veznik  $\rightarrow$  ima desnu asocijativnost, što znači da naredni izraz  $A \rightarrow B \rightarrow C$  ima značenje kao da su zagrade postavljene ovako  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ , dok ostali binarni veznici imaju levu asocijativnost.

*Jednakost* se koristi uobičajeno kao infiksni operator  $=$  čiji je tip  $`a \Rightarrow `a \Rightarrow \text{bool}$ , što znači da se može primeniti na objekte raznih tipova (ali međusobno jednakih), pa i nad formulama. Jednakost formula ima značenje *ako i samo ako*, a može se zapisati i sa  $\leftrightarrow$  (operatori  $=$  i  $\leftrightarrow$  imaju isto logičko značenje kada se primene na logičke formule tj. terme tipa *bool*, ali operator  $\leftrightarrow$  ima mnogo manji prioritet).

*Univerzalni i egzistencijalni kvantifikator* zapisuju se na uobičajeni način  $\forall x. P$  i  $\exists x. P$ .

Formule tog oblika, u kojima se veznici primenjuju samo na promenljive tipa *bool* i u kojima se ne koriste kvantifikatori, nazivaćemo *iskazne formule*. Formule u kojima se kvantifikacija vrši samo nad promenljivama elementarnih tipova (npr. nad brojevima) nazivaćemo *formule logike prvog reda*, a formule u kojima se kvantifikacija vrši nad funkcijama nazivaćemo *formule logike višeg reda*. Na primer, formula  $\neg (A \wedge B) \leftrightarrow A \vee B$  je iskazna formula, formula  $\neg (\forall x. P x) \leftrightarrow (\exists x. \neg P x)$  je formula logike prvog reda, dok je formula  $(\forall x. \exists y. P x y) \leftrightarrow (\exists f. \forall x. P x (f x))$  formula logike višeg reda.

Najčešće korišćeni logički simboli i njihov ASCII zapis (u proširenom i u skraćenom obliku) navedeni su u nastavku teksta. Ovi (i slični) simboli mogu se ispisati u obliku naredbe ili se učitati prilikom kucanja naredbe (pritiskom na dugme *Tab* kada sistem prepozna i ponudi nekoliko mogućih simbola) ili, u situacijama kada se učitava ranije napisan Isabelle/HOL fajl, biranjem opcije iz menija *File/Reload with Encoding/UTF-8-Isabelle* što će ponovo učitati simbole umesto ASCII zapisa simbola.

$\forall$	<code>\&lt;forall&gt;</code>	ALL
-----------	------------------------------	-----

$\exists$	<code>\&lt;exists&gt;</code>	EX
$\lambda$	<code>\&lt;lambda&gt;</code>	%
$\rightarrow$	<code>--&gt;</code>	
$\leftrightarrow$	<code>&lt;-&gt;</code>	
$\wedge$	<code>\^</code>	&
$\vee$	<code>\ </code>	
$\neg$	<code>\&lt;not&gt;</code>	~
$\neq$	<code>\&lt;noteq&gt;</code>	~=

Za sve nabrojane veznike, u Isabelle/HOL možemo koristiti naredbu `term` da dobijemo tip veznika. Kada se ispituje tip, veznik mora da bude naveden u zagradi, npr. `term (^)`.

Prilikom formulisanja teorija, definicije i tvrđenja zapisuju se korišćenjem do sada opisane sintakse. Ta sintaksa predstavlja sintaksu objektnog nivoa, a za formule koje smo do sada videli kažemo da su formule objektnog nivoa u logici višeg reda Isabelle/HOL. Interno, međutim, ova objektna logika samo je jedna od raznih logika koje sistem Isabelle poznaje. Sve te logike (uključujući i ovu logiku Isabelle/HOL) definisane su u okviru meta-logike sistema Isabelle.

## –Primer ispitnih zadataka

U nastavku je prikazano nekoliko zadataka koji se mogu koristiti za pregled osnovnih primera koji se mogu jednostavno dokazati u Isabelle. Navedena je prvo formulacija zadatka, a onda i njegovo rešenje. Svi zadaci mogu se nezavisno proveravati u Isabelle.

```
theory Ispit
imports Complex_Main
begin
(* 1 *)
text \<open>Koriscenjem pravila prirodne dedukcije za klasičnu logiku prvog reda dokazati naredne
leme.

Napomena: Dokaz prve leme je deo dokaza druge leme. U slucaju da ne uspete da dokažete drugu
lemu do kraja, pokušajte sa prvom lemom.\<close>

(* 4 poena - ako je uradjena samo ova lema *)
(* ako uradite narednu lemu, ovu ne morate da radite *)

lemma "(\\<forall> x. (G x \\<longrightarrow> \\<not> I x) \\<longrightarrow> F x \\<and> H x) \\<and>
(\\<forall> x. \\<not> H x) \\<longrightarrow> (\\<forall> x. I x)"
apply (rule impI)
apply (erule conjE)
apply (rule allI)
apply (erule_tac x = x in allE)
apply (erule_tac x = x in allE)
```

```

apply (rule ccontr)
apply (erule impE)
apply (rule impI)
apply assumption
apply (erule conjE)
apply (erule notE)
apply assumption
done

(* 10 poena *)
lemma "( $\forall x. F x \vee G x \longrightarrow \neg H x$ )  $\wedge$  ( $\forall x. (G x \longrightarrow \neg I x) \longrightarrow F x \wedge H x$ )  $\longrightarrow$  ( $\forall x. I x$ )"
apply (rule impI)
apply (erule conjE)
apply (rule allI)
apply (erule_tac x = x in allE)
apply (erule_tac x = x in allE)
apply (erule impE)
apply (rule ccontr)
apply (erule impE)
apply (rule impI)
apply (erule notE)
apply (rule disjI2)
apply assumption
apply (erule notE)
apply (erule conjE)
apply (rule disjI1)
apply assumption
apply (rule ccontr)
apply (erule impE)
apply (rule impI)
apply assumption
apply (erule conjE)
apply (erule notE)
apply assumption
done

(* 2 *)

(* Dokazati da važi sledeća lema u Isar-u. Navesti detaljan dokaz*)

(* Napomena: ako ne uspevate da dokažete ekvivalenciju, podelite lemu na dve leme:
podskup i nadskup *)
lemma
assumes "inj f"
shows " $f`A \subseteq B$ "  $\iff$  " $f`A \subseteq f`B$ "
(is "?l = ?d")
proof
show "?l  $\subseteq$  ?d"
proof
fix y
assume "y  $\in$  ?l"
from this obtain x where "x  $\in$  A  $\wedge$  B" "f x = y" by auto

```

```

from this have "x <in> A""x <in> B" by auto
from this `f x = y` have "y <in> f ` A""y <in> f ` B" by auto
from this show "y <in> ?d" by auto
qed
next
show "?d <subteq> ?l"
proof
fix y
assume "y <in> ?d"
from this have "y <in> f ` A""y <in> f ` B" by auto
from this obtain xa where "xa <in> A""f xa = y" by auto
from <open>y <in> f ` B<close> obtain xb where "xb <in> B""f xb = y" by auto
from this `f xa = y` have "f xa = f xb" by auto
from this `inj f` have "xa = xb" by (auto simp add: inj_def)
from this `xa <in> A` `xb <in> B` have "xa <in> A <inter> B" by auto
from this `f xa = y` show "y <in> f ` (A <inter> B)" by auto
qed
qed

```

(\* 3 \*)

(\* Korišćenjem isključivo narednih teorema, dokazati korak po korak narednu jednakost \*)  
(\* Napomena: dozvoljeno je korišćenje samo simp only, eventualno simp add u slučaju kada je neophodno \*)

```

thm mult.commute
thm algebra_simps(19)
thm HOL.no_atp(121)
thm semiring_normalization_rules(29)
thm algebra_simps(20)

```

lemma ab:

```

fixes a b ::real
shows "(a-b)^2 = a^2-2*a*b+b^2"
proof-
have "(a-b)^2=(a-b)*(a-b)"
by (simp only: semiring_normalization_rules(29))
also have "... = a*(a-b)- (b*(a-b))"
by (simp only: Groups.algebra_simps(20))
also have "... = a*a - a*b -(b*a - b*b)"
by (simp only: Groups.algebra_simps(19))
also have "... = a^2 - a*b - b*a +b^2"
by (simp only: semiring_normalization_rules(29))
also have "... = a^2-2*a*b+b^2"
by (simp add: mult.commute)
finally
show ?thesis

```

by auto  
qed

(\* 4 \*)

text\<open> Formalizovati sledeći dokaz (upotrebiti pravilo `nat_induct_at_least`, čiji su slučajevi `base` i `Suc`). Pored ovog pravila, u dokazu je dozvoljeno korišćenje `simp` (ako baš ne uspete, uključite `auto`, ali izgubićete određene poene).

Teorema: Za  $n \geq 1$  važi  $n < 2^n$ .

Dokaz indukcijom po  $n$ .

Baza,  $n = 1$ . Tada je  $1 < 2^1 = 2$ .

Neka je  $k \geq 1$ . Pretpostavimo da važi da je  $k < 2^k$ .

Dokazujemo da je  $k + 1 < 2^{k+1}$ .

Važi da je

$k + 1 \leq k + k$

Na osnovu induktivne hipoteze važi da je  $k + k < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ .

Zato je  $k + 1 < 2^{k+1}$ .

\<close>

lemma

fixes n :: nat

assumes "n  $\geq$  1"

shows "n  $<$  2 ^ n"

using assms

proof (induction n rule: nat\_induct\_at\_least)

case base

then show ?case

by simp

next

case (Suc k)

then have "k + 1  $\leq$  k + k"

by simp

also have "...  $<$  2^k + 2^k"

using Suc(2)

by simp

also have "... = 2 ^ (k + 1)"

by simp

finally show ?case

by simp

qed

(\* 5 \*)

(\* Ako je data naredna definicija (proizvoljno formulisana samo zbog primera): \*)

definition par1:: "(nat  $\times$  nat) list"

where "par1 = [(1,10), (2,20), (3,30)]"

(\* Primitivnom rekurzijom definisati funkciju koja na osnovu liste parova određuje par listi (tako da prva lista sadrži prve, a druga lista druge elemente pojedinačnih parova. \*)

```

primrec rastavi :: "(nat \\rightarrow nat list \\rightarrow nat list \ $\rightarrow$  (nat \

```



# *University of Niš*

## *The TeComp Consortium*

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



[www.tecomp.ni.ac.rs](http://www.tecomp.ni.ac.rs)

e-mail:

[tecomp@ni.ac.rs](mailto:tecomp@ni.ac.rs)

[tecomp.p2018@gmail.com](mailto:tecomp.p2018@gmail.com)

Copyright©TeComp Consortium

This project has been co-funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein